

Mémoire présenté devant l'ENSAE Paris  
pour l'obtention du diplôme de la filière Actuariat  
et l'admission à l'Institut des Actuaires  
le 05/02/2020

Par : **Khaoula Lyoubi**

Titre : **Modélisation de la réponse des assurés à une  
incitation financière : Arbitrage entre fonds en euros  
et en unités de compte et politique de participation  
aux bénéfices**

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1 an  2 ans)

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

*Membres présents du jury de la filière*

*Christian-Yann Robert*

*Entreprise : Mazars Actuariat*

*Nom : Alexandre Guchet*

*Signature :*

*Membres présents du jury de l'Institut  
des Actuaires*

*Matthieu Chauvigny*

*Directeur du mémoire en entreprise :*

*Nom : Ismaël Tahri Hassani*

*Signature :*

*Florence Picard*

*Nom : Estelle De L'Eprevier*

*Signature :*

*Adrien Suru*

**Autorisation de publication et de  
mise en ligne sur un site de  
diffusion de documents actuariels  
(après expiration de l'éventuel délai de  
confidentialité)**

Signature du responsable entreprise

Secrétariat :

Signature du candidat

Bibliothèque :

# Remerciements

*Je tiens tout d'abord à remercier Alexandre GUCHET & Grégory BOUTIER, associés de Mazars, pour m'avoir acceptée en stage au sein de l'équipe de Mazars Actuariat.*

*En particulier, je remercie Ismaël TAHRI HASSANI pour m'avoir donnée l'opportunité de travailler sur ce sujet passionnant.*

*Je remercie l'ensemble de l'équipe Actuariat dont la bonne humeur m'a permise de mener mes travaux dans un cadre chaleureux. En particulier, Isabelle, Marion, Thomas, Mehdi, Yahya, Geoffrey, Julie, Candice, Maxime, Rédouane, Julien, Abdoulaye, Amaury, Fazzo, Othmane, Maxence, Tima, Iliasse, Apolline, Axel, Gaëtan, Hoan-Phi et Alexandra.*

*Je souhaite remercier également mon référent pédagogique Christian-Yann Robert et la responsable de la voie Actuariat Caroline Hillairet, pour la qualité de leurs enseignements ainsi que pour leurs conseils.*

*Je remercie mes amis qui ont toujours été là pour moi. Leur soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide.*

*Je tiens à remercier mes parents et ma soeur Salma pour leur soutien permanent et constant.*

*Enfin, je remercie Yassine pour m'avoir épaulée dans la réalisation de ce mémoire.*

# Résumé

**Mots clés :** assurance-vie, épargne, supports en euros, supports en unités de compte, arbitrage, politique de participation aux bénéfiques, théorie de la décision.

Ce mémoire s'intéresse à l'arbitrage entre fonds en euros et en unités de compte. Dans un contexte de taux bas, la rentabilité des assureurs est affectée à la baisse, du fait qu'elle dépend essentiellement des revenus financiers perçus au titre des primes investies en obligations à taux fixes. Pour faire face à cette situation, les assureurs cherchent à réorienter l'épargne des assurés vers les unités de compte. En effet, ces supports ne garantissent pas le capital versé et sont investis sur des supports plus risqués et donc plus rémunérateurs à long terme pour l'assuré que les fonds en euros. De plus, les obligations en termes de fonds propres réglementaires diminuent grâce aux unités de compte.

Pour favoriser l'arbitrage vers les unités de compte, les assureurs peuvent faire appel à un des principaux leviers à leur disposition : la politique de participation aux bénéfiques. En effet, la distribution de la participation aux bénéfiques discrétionnaire est laissée à la libre appréciation de l'assureur. Une pratique de plus en plus courante chez les assureurs est de proposer aux assurés des bonus de rendement sur les fonds en euros, pour les clients plaçant une part significative de leur épargne en unités de compte par exemple. Ce mémoire propose de modéliser la réponse des assurés par rapport à une incitation financière de type bonus de rendement sur les fonds en euros, en s'appuyant sur la théorie de la décision.

Dans un premier temps, nous sélectionnons un modèle de théorie de la décision adéquat à notre problématique. Le modèle retenu est un modèle de choix binaire. Dans un second temps, nous adaptons le modèle au cas d'un choix à plusieurs alternatives à l'aide d'un algorithme d'extension. Nous calibrons par la suite les paramètres du modèle, tels que l'aversion au risque, sur une base de données d'assurés. Dans un troisième temps, nous déterminons les seuils d'éligibilité aux bonus en fonction de la part en unités de comptes ainsi que les bonus de rendement (via la politique de participation aux bénéfiques) correspondants. Les seuils ainsi que les bonus constituent une solution de réorientation de l'épargne vers les unités de compte qui va être proposée aux assurés. Nous caractérisons cette solution tout en respectant l'appétence des assurés au risque et en maximisant la proportion des assurés qui détiennent au moins un niveau fixé par l'assureur de fonds en unités de compte.

Ainsi, notre modèle permet d'estimer, dans un cadre probabiliste, la proportion des assurés qui détiennent au moins la part en unités de compte cible, après application de la politique commerciale que propose ce mémoire.

# Abstract

**Keywords :** life insurance, saving, euro funds, unit-linked funds, arbitrage, profit-sharing policy, decision theory.

This thesis looks at the arbitrage between euro and unit-linked funds. Given that insurance providers' returns largely depend on returns on fixed rate bonds, the fall in market interest rates puts pressure on their profits. Insurers can react by channeling savings towards unit-linked funds. Indeed, these funds do not guarantee the capital initially invested, make riskier investment and therefore generate higher returns. Unit-linked funds reduce the regulatory risk-weighted capital requirements.

To incentivize the arbitrage towards unit-linked funds, insurers can leverage profit-sharing policies. Since these policies are left at the insurers' discretion, an increasingly popular practice consists of offering savers bonuses on euro fund returns when they choose to invest a significant share of their savings in unit-linked funds. This thesis attempts to model savers' reaction to such incentives, relying on decision theory models.

First, we select a decision theoretical model that fits our problem. We adopt a binary choice model. Second, we adapt the model to a multiple-choice setting using an extension algorithm. We then calibrate the model's parameters using a database of savers. Third, we determine the bonus eligibility thresholds and the corresponding bonuses as functions of the share invested in unit-linked funds. The thresholds and the bonus together determine the profit-sharing policy that will be proposed to savers. We characterize a solution that takes the savers' risk appetite into account and maximizes the share of savers that invest in unit-linked funds beyond a certain fixed level.

Hence, our model allows for the estimation of the share of savers that invest in unit-linked funds beyond a certain target share of their wealth, in case the profit-sharing policy discussed in this thesis is implemented.

# Note de synthèse

Ce mémoire porte sur la modélisation de la réponse des assurés à une incitation financière dans le cadre d'une refonte de la politique de taux servi.

Avec des rendements des fonds en euros en déclin depuis plus de quinze ans, les assureurs sont amenés à repenser leur modèle d'activité pour transférer de l'épargne investie en fonds en euros vers des fonds en unités de compte (UC). En effet, le contexte économique du niveau faible des taux d'intérêt met en tension le service de l'épargne en euros : les contrats anciens bénéficient souvent d'un taux minimum garanti (TMG) très supérieur au rendement actuel des obligations de courte maturité et les TMG plus faibles pèsent sur la stabilité financière des assureurs. La réorientation du placement des actifs est une première solution : les actifs plus risqués comme les maturités plus longues améliorent le rendement. Cependant, outre le fait que l'allongement de la maturité expose au risque de brusque remontée des taux, la directive Solvabilité II pénalise plus fortement ces types d'actifs.

Du côté des assurés, les Français sont considérés comme étant très averses au risque et investissent massivement dans des fonds en euros. En effet, selon le Baromètre de l'épargne et de l'investissement, une étude annuelle effectuée par l'autorité des marchés financiers (l'AMF) afin de suivre les évolutions des objectifs des épargnants, il ressort que l'épargne française se concentre majoritairement sur des placements sans risque et à rendement faible. Cependant avec la loi Sapin II, la volonté du gouvernement est claire : les autorités de contrôle incitent les assureurs à baisser les taux servis pour renforcer la dotation en provisions pour participation aux bénéfices et se protéger d'une éventuelle forte hausse des taux d'intérêt.

Afin de contrer les effets de cet environnement de taux bas, les mesures préventives prises par les compagnies d'assurance ont été axées sur trois points principaux : la politique de revalorisation des contrats d'assurance vie, la politique de souscription et la politique d'investissement. En effet, à côté d'une éventuelle réallocation du portefeuille d'actifs, une solution efficace pour l'assureur consiste à réorienter l'épargne en euros vers des contrats en UC, sur lesquels il ne supporte pas de risque de marché. Des campagnes commerciales pour souscriptions nouvelles ont été menées en ce sens, par exemple sur la base d'une suppression des frais d'entrée lorsque la proportion d'UC dans un contrat multisupport excède un certain seuil. Bien que de telles actions semblent avoir un effet sur la souscription des nouveaux contrats, elles ne modifient pas les contrats en stock qui présentent, étant donné leur volume et leur

TMG élevé, le plus gros enjeu de l'assureur.

Ce mémoire se place donc dans le cadre d'un assureur cherchant à inciter ses assurés à arbitrer vers des supports en UC. Il s'agit ainsi de modéliser la réponse de l'assuré à une incitation financière telle qu'une politique de taux servi. Le pilotage de la politique de revalorisation de la rémunération des polices d'assurance vie est au cœur des préoccupations des assureurs et des assurés puisqu'il affecte directement la rémunération de leur épargne.

La répartition des bénéficiaires est laissée à la libre appréciation des assureurs. Cette répartition discrétionnaire rend possible, par la mise en place de *spreads* de PB, une bonification du rendement (surcroît de performance) des contrats favorables à l'assureur : ceux qui dépassent un certain seuil d'UC ou ceux qui ont arbitré dans l'année en faveur des UC par exemple. Toutefois, le pilotage d'une telle stratégie est complexe car les paramètres sont nombreux. En effet, il faut prendre en compte, entre autres, la part d'assurés effectuant l'arbitrage, l'ampleur des arbitrages, l'appétence au risque des clients et surtout la propension des assurés à répondre effectivement à de telles incitations financières. Le but est de maximiser à la fois l'utilité de l'assuré et l'objectif de l'assureur en respectant plusieurs contraintes.

Afin de modéliser la réponse des assurés à ce type d'incitation, un modèle probabiliste de théorie de la décision a été sélectionné. L'apport de ce mémoire est de dépasser le cadre strict de la maximisation de l'utilité espérée. En particulier, nous adoptons un modèle de choix probabiliste où, contrairement aux modèles déterministes de la théorie de la décision, un même agent peut prendre des décisions différentes dans des contextes identiques.

Plusieurs critères ont été retenus pour sélectionner le modèle, le plus important étant la dominance stochastique d'ordre un<sup>1</sup>. En théorie de la décision, la validité normative des modèles, bien qu'ils soient pertinents de manière descriptive, peut être remise en question si la dominance stochastique d'ordre un est violée. Le choix s'est porté sur un modèle de choix binaire probabiliste formalisé par Blavatsky [6]. Dans ce modèle, le décideur satisfait toujours la dominance stochastique du premier ordre. Si deux loteries ne sont pas ordonnées au sens de la dominance stochastique d'ordre un, un décideur choisit de manière probabiliste entre les deux. De plus, le modèle proposé offre un meilleur ajustement aux données expérimentales que les modèles existants [6].

Dans ce modèle, la règle de décision de l'assuré est une fonction de l'utilité espérée. Plusieurs fonctions d'utilité ont été envisagées. La fonction d'utilité CRRA (*constant relative risk aversion*) est celle qui a été retenue, du fait du lien faible entre la richesse et la part d'actif risqué (UC) constaté dans le cadre de cette étude.

En théorie de la décision, plusieurs modèles sont développés pour des problématiques de choix binaire. Cependant, plusieurs applications de la théorie comme celle correspondant à la

---

1. On dit qu'une fonction de répartition  $F$  domine une autre fonction de répartition  $G$  dans le sens de la dominance stochastique d'ordre un si  $\forall x \in \mathcal{X}, F(x) \leq G(x)$ .

problématique de ce mémoire, nécessitent un modèle de choix à plusieurs alternatives. Ainsi, nous utilisons un algorithme d’extension pour généraliser ce modèle de choix binaire en un modèle de choix multiples.

Après avoir sélectionné le modèle de théorie de la décision qui correspond à notre problématique, nous avons adapté ce modèle à notre contexte. Ensuite, nous avons calibré les paramètres relatifs au modèle à l’instar de l’aversion au risque et les paramètres du fonds UC (risque, rendement) sur la base de données réelles. Le but est que le modèle reflète aussi fidèlement que possible le comportement humain en réponse aux incitations financières que nous proposons dans notre solution. Enfin, nous avons simulé la réponse des assurés sur la base des paramètres calibrés lors de la phase précédente.

Pour analyser le comportement des individus face à la solution de bonification proposée, nous avons appliqué le modèle en utilisant quatre seuils de bonification :

- trois seuils sur la variation de la part en UC après arbitrage (du fonds en euros vers l’UC) ;
- un seuil sur la part en UC.

Dans ce cadre, la mise en place de cette solution pose un certain nombre de questions :

- Comment fixer les seuils d’éligibilité à la bonification ?
- Comment communiquer sur le dispositif aux assurés ?
- Comment intégrer cette bonification à la politique de taux servi ?

Notre étude s’articule ainsi autour d’une réflexion portant sur la modélisation de la réponse des assurés par un modèle probabiliste de la théorie de la décision mais aussi, autour de la caractérisation d’une solution concrète de bonification basée sur une refonte de la politique de taux servi. Elle ne se limite donc pas à une pure étude théorique.

Dans notre étude, nous supposons que l’assureur cherche à maximiser la probabilité que la part d’UC globale de son portefeuille soit supérieure ou égale à une proportion cible de 30%. Ainsi, nous souhaitons distribuer la PB de manière à maximiser cette probabilité. Pour ce faire, nous bonifions l’effort des assurés qui arbitrent vers les fonds en UC en survalorisant leurs taux servis tout en respectant les contraintes de la PB réglementaire. Les bonus déterminés sont servis en complément du taux servi aux assurés qui n’ont pas arbitré (ou qui n’ont pas suffisamment arbitré) pour être éligibles à une survalorisation. Nous présentons ci-dessous la solution proposée :

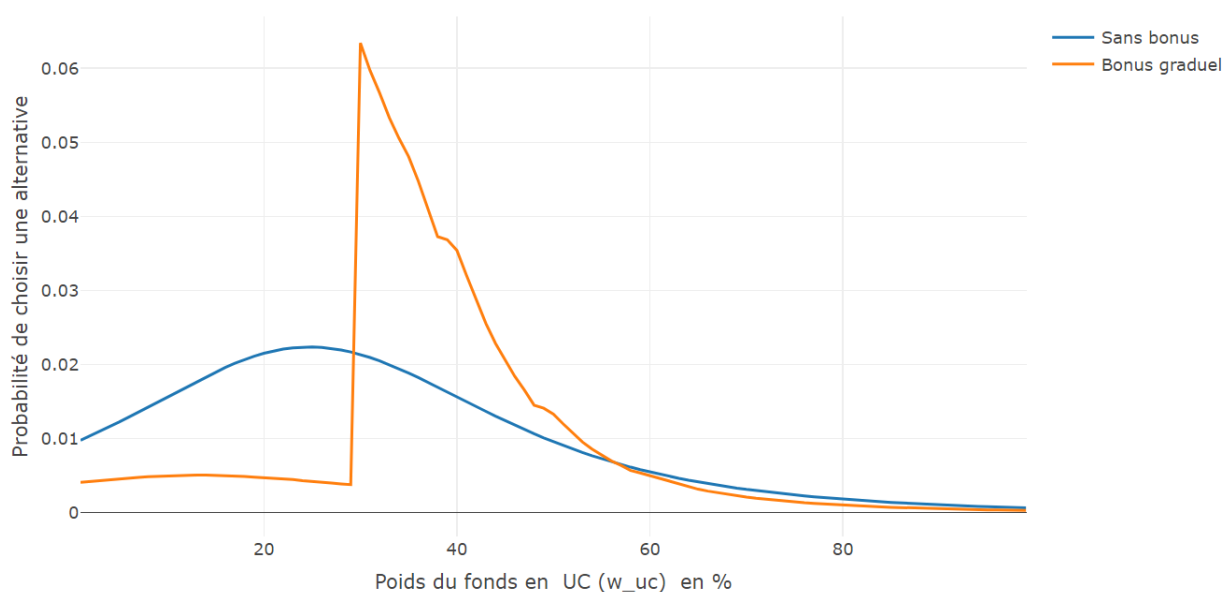
	Variation de la part UC		
	$\geq 10\%$	Comprise entre 20% et 30%	$\geq 30\%$
Part UC < 30%	12 <i>bps</i>	30 <i>bps</i>	49 <i>bps</i>
Part UC $\geq 30\%$	61 <i>bps</i>	79 <i>bps</i>	98 <i>bps</i>

**TABLE 1** – Forme de la solution de bonification proposée

Celle-ci pourrait par exemple être formulée dans le cadre d'une communication aux assurés sous un format écrit plus explicite, par exemple pour le cas de **Part UC** < 30 % :

- Bonus de 12 *bps* en complément du taux servi sur le fonds en euros pour une variation de la part en UC entre le 31/12/n et le 31/12/n-1 supérieure 10%.
- Bonus de 30 *bps* en complément du taux servi sur le fonds en euros pour une variation de la part en UC entre le 31/12/n et le 31/12/n-1 entre 20% et 30%.
- Bonus de 49 *bps* en complément du taux servi sur le fonds en euros pour une variation de la part en UC entre le 31/12/n et le 31/12/n-1 supérieure ou égale 30%.

Nous comparons la distribution globale des parts en UC dans les cas d'absence et d'application du bonus graduel (solution de bonification). La figure 1 ci-dessous présente les résultats obtenus.



**FIGURE 1** – Distribution globale du portefeuille avec et sans incitation financière (fonction de masse)

Sur le graphique 1, la courbe orange correspond au cas de l'application de l'incitation financière tandis que la courbe bleue correspond au cas de non application. L'effet de l'incitation financière se traduit par le saut de la courbe de couleur orange à  $w_{uc} = 30\%$ . Nous observons que globalement l'incitation financière appliquée fait diminuer la probabilité d'avoir moins de 30% en UC.

L'attribution de bonification requiert une réallocation des masses financières attribuées à la participation aux bénéficiaires. Il convient alors dans ce cadre de mesurer l'incidence de cette politique d'incitation ainsi que son intégration dans la refonte de la politique de taux servi.



L'étude porte sur six produits d'épargne. Nous calculons dans cette partie le taux servi par l'assureur pour chaque produit tout en respectant le critère de PB réglementaire. L'étude porte sur six produits d'épargne. Le tableau 4 présente les résultats obtenus.

Produit ( $k$ )	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
Taux servi ( $\tau_0$ )	1.76%	1.12%	1.97%	1.66%	1.94%	1.19%

**TABLE 2** – Taux servi par produit d'épargne

Pour chaque assuré, le taux final servi est la somme du taux servi  $\tau_0$  et des éventuels bonus obtenus.

Les résultats obtenus dans le cadre de cette étude démontrent qu'à l'aide d'un choix judicieux des seuils et des bonus correspondants, l'assureur arrive à réorienter une partie de l'épargne vers les unités de compte. Cependant, pour juger de l'efficacité de la politique d'incitation financière, celle-ci doit être confrontée à la réalité. En effet, dans cette étude, deux limites principales peuvent être identifiées. D'abord, nous avons supposé que tous les agents sont caractérisés par un même niveau d'aversion au risque. Il serait plus réaliste d'estimer un paramètre d'aversion au risque par assuré. Ceci nécessiterait des observations sur les choix d'investissement de chaque assuré au fil de plusieurs années. La deuxième limite concerne l'horizon de l'étude. Nous avons considéré que l'horizon de la politique d'incitation financière est d'un an. Néanmoins, l'objectif de l'assureur dépend de sa stratégie d'investissement qui est définie à un horizon pluriannuel.

La démarche d'analyse présentée peut être mise en oeuvre par les assureurs dans le cadre d'une refonte de politique de taux servi. Les conclusions ne seront certainement pas les mêmes selon les assureurs car elles dépendent de l'objectif à maximiser. L'organisme d'assurance définit son objectif à maximiser selon trois principaux leviers qui reflètent sa stratégie à long terme : la stratégie commerciale (taux garantis etc.), la stratégie d'investissement (l'allocation stratégique des placements etc.) et la stratégie de participation aux bénéfices.

# Executive summary

This thesis is concerned with the modeling of insurers' response to financial incentives in order to revamp an insurer's rate policy.

With the decline in euro funds' returns over the past fifteen years, these insurance products characterized by high yields and low risk push insurers to rethink their business models towards a shift of investments from euro funds to unit linked ones. Indeed, the current economic context - marked by low interest rates - puts pressure on euro-based savings service : old contracts usually have a minimum guaranteed interest rate that is much higher than the current yield on short maturity bonds and lower interest rates weigh on insurers' financial stability.

A first solution would be to shift asset investment : the riskier assets, such as long maturity bonds, improve returns. However, besides the fact that maturity extensions increase the exposure to the risk of sudden interest rate increases, Solvency II directive heavily penalizes this type of investment.

Relative to other countries, the French are very averse to risk and invest massively in euro funds. Following "le baromètre de l'épargne et de l'investissement" (saving and investment barometer), a study conducted yearly by the French financial markets' regulator (the AMF), the savings of French households are primarily invested in low risk and low return financial products. Nevertheless, with the Sapin II bill, the government's intentions are clear : regulators provide incentives for insurers to lower the interest rates served to strengthen provisions for profit-sharing and protect themselves from potential sharp rise in interest rates.

To face the low interest rate context, the precautionary measures taken by insurance companies are focused around three components : the revaluation of life insurance contracts' policy, the underwriting policy and the investment policy. Indeed, besides a potential reallocation of the assets' portfolio, an efficient solution could be for the insurer to shift savings invested in euro funds towards unit linked contracts over which he only bares little market risks. Numerous commercial campaigns for new underwritings have been conducted in this sense. One example of such a campaign would be to waive entry fees when the proportion invested in unit-linked funds in a multi-vehicle contract exceeds a given threshold. Even though these campaigns seem to have some effect on new contracts, they do not impact the old

ones which constitute the biggest challenge for the insurer given their volume and their high minimum rate guaranteed.

This thesis is written from the perspective of an insurer trying to provide incentives for its customers to arbitrate towards unit-linked funds. We are therefore interested in modeling the response of an insured to financial incentives like the interest rate policy. The monitoring of the revaluation policy of insurance policies is a key concern for both insurers and savers. It is of a big importance to savers as it directly impacts returns on their savings.

The profit-sharing policy is left to the insurer's discretion. This the insurer to grant bonuses (excess returns) to the contracts that are in his favor : those that invest beyond a certain level or those that have shifted investments towards unit-linked funds for instance. However, the monitoring of such a strategy can be complex since many parameters intervene. One has to take into account the share of savers arbitrating, the amplitude of arbitrages customers' attitudes towards risk and, the insureds' propensity to actually respond to such incentives among many other parameters. The aim is to maximize both the insured's utility and the insurer's objective while respecting several constraints.

In order to model the insured's response to this type of incentives, a probabilistic decision theory model was selected. This theses' main innovation is that it goes beyond the expected utility maximization framework. Specifically, we adopt a probabilistic choice model where, as opposed to deterministic decision theory models, a same agent can take different decisions even when they are put in the same context.

Many criteria have been used to select the appropriate model, first order stochastic<sup>2</sup> dominance being the most important. In decision theory, even if a model provides a good description of a phenomenon, its normative validity can be questioned if it is not compatible with the first order stochastic dominance. We selected a stochastic decision theory model formalized by Blavatsky [6]. In this model, the decision maker always satisfies first order stochastic dominance. If two lotteries are not ordered in the first order stochastic dominance sense, the decision maker picks one of the two alternatives following some probability rule. Moreover, this model offers a better fit to the experimental data [6].

In this model, the decision rule is a function of the expected utility. Several utility functions have been considered. We selected the CRRA (constant relative risk aversion) utility function du to the weak link observed in this study between wealth and investment in unit linked funds. In decision theory, numerous models are developed for binary choice problems. However, many applications, like ours, require multiple choice models. We use an extension algorithm to generalize the binary choice model to a multiple choice one.

---

2. We say that a cumulative distribution function  $F$  first order stochastically dominates a distribution  $G$  if,  $\forall x, F(x) \leq G(x)$

After selecting the appropriate decision theory model, we adapt it to our context. Then we calibrate the model's parameters (such as the risk aversion and the funds risk and return parameters) using our database. The goal is to reflect as reliably as possible the response to the incentives we design in this thesis. Finally, we simulate the insureds' response based on the calibrated parameters obtained in the previous step.

To analyze the behavior of individuals to the proposed policy, we applied the model using four bonus thresholds :

- three thresholds on the variation of the share invested in unit-linked funds after and before arbitrage (from euro funds to unit linked funds);
- one threshold on the unit linked share.

The implementation of this solution raises several questions :

- How to determine the eligibility thresholds ?
- How to communicate about this device with customers ?
- How to integrate this device with the interest rate policy ?

In this thesis, we assume that the insurer maximizes the probability that the total share invested in unit linked funds exceeds or equals 30 %. Hence, we wish to distribute bonuses so as to maximize this probability. To this end, we reward the savers that arbitrage towards unit linked funds by increasing their returns while respecting the regulatory constraints related to profit-sharing. The bonus we determine are paid as complement to the returns that the non-arbitraging savers receive. Hereafter, we present the proposed solution :

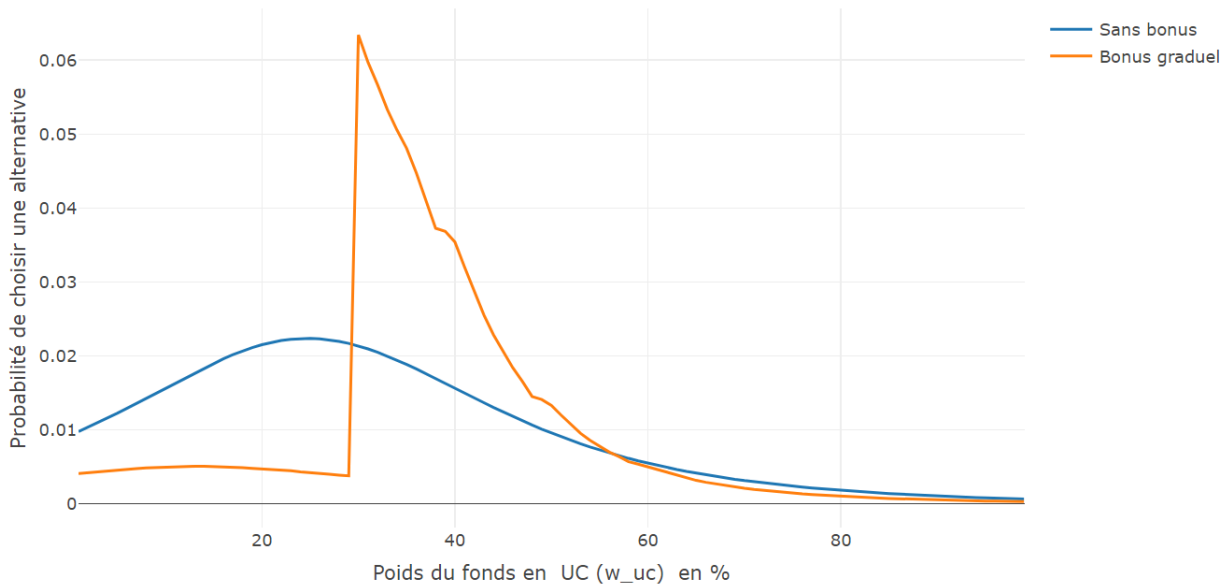
	Unit linked share variation		
	$\geq 10\%$	Between 20% and 30%	$\geq 30\%$
<b>Unit linked share</b> $< 30\%$	12 <i>bps</i>	30 <i>bps</i>	49 <i>bps</i>
<b>Unit linked share</b> $\geq 30\%$	61 <i>bps</i>	79 <i>bps</i>	98 <i>bps</i>

**TABLE 3** – The bonuses in the proposed solution.

This solution can be communicated to the savers in a more explicit fashion. For instance, for the case **Unit linked share**  $< 30\%$  :

- A bonus of 12 *bps* in addition to the rate served on the euro fund for a variation in the unit linked share between  $31/12/n$  and  $31/12/n-1$  larger than 10 %.
- A bonus of 30 *bps* in addition to the rate served on the euro fund for a variation in the unit linked share between  $31/12/n$  and  $31/12/n-1$  between 20 % and 30%.
- A bonus of 49 *bps* in addition to the rate served on the euro fund for a variation in the unit linked share between  $31/12/n$  and  $31/12/n-1$  larger than 30 %.

We compare the global distribution of unit linked funds' shares in both the case where the solution is implemented and where it is not. Figure 2 presents the result.



**FIGURE 2** – The global distribution of the unit linked share in the portfolio with and without financial incentives (probability mass function)

In figure 2, the curve in orange corresponds to the case where the policy is implemented, while the curve in blue corresponds to the no bonus case. The impact of the solution translates into a jump in the orange curve at the point  $w_{uc} = 30\%$ . Note that, globally, the incentive decreases the probability of an insured investing less than 30 % in unit linked funds. The bonus allocation requires a reallocation of the financial resources allocated to profit sharing. In this context, it is worthwhile to evaluate the impact of this incentive policy as well as its integration into the overhaul of the interest rate policy. The study focuses on six savings products. We calculate in this part the rate served by the insurer for each product while respecting the regulatory requirements.

<b>Product (<math>k</math>)</b>	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
Interest rate served ( $\tau_0$ )	1.76%	1.12%	1.97%	1.66%	1.94%	1.19%

**TABLE 4** – The interest rate per product.

For each customer, the final interest rate is the sum of the interest rate served and the eventual bonuses obtained.

The results obtained in this study show that, with a judicious choice of thresholds and corresponding bonuses, the insurer manages to redirect part of the savings towards the units of account. However, to evaluate the effectiveness of the financial incentive policy, it must be confronted with reality. Indeed, in this study, two main limits can be identified. First, we assumed that all agents are characterized by the same level of risk aversion. It would be more realistic to estimate a risk aversion parameter per insured. This would require observations on the investment decisions of each insured over several years. The second limitation relates

to the study horizon. We have considered that the financial incentive policy has a one-year horizon. However, the objective of the insurer depends on its investment strategy which is defined on a multi-year horizon.

The approach presented here can be implemented by insurers as part of an overhaul of the interest rate policy. The conclusions will certainly vary from one insurer to the other because they depend on the objective to be maximized. The insurance organization defines its objective according to three main levers which reflect its long-term strategy : the commercial strategy (e.g. guaranteed rates), the investment strategy (strategic allocation of investments) and the profit-sharing strategy.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Résumé</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Note de synthèse</b>	<b>iv</b>
<b>Executive Summary</b>	<b>ix</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Cadre et objectifs de l'étude</b>	<b>3</b>
1.1 Présentation de l'assurance-vie . . . . .	3
1.1.1 Les contrats d'épargne . . . . .	4
1.1.2 Quelques notions d'assurance-vie . . . . .	5
1.1.3 Politique de participation aux bénéfices . . . . .	7
1.2 Un objectif d'arbitrage vers les UC . . . . .	9
1.2.1 Quelques solutions commerciales explorées . . . . .	9
1.2.2 Les préférences des Français . . . . .	12
1.2.3 Un outil de pilotage puissant mais complexe à prévoir . . . . .	13
<b>2 Modélisation de la réponse des assurés</b>	<b>15</b>
2.1 Théorie de la décision : une approche de modélisation du comportement des assurés . . . . .	17
2.1.1 Préférences et utilité : les premières briques . . . . .	17
2.1.2 Les axiomatiques . . . . .	24
2.1.3 Revue des modèles alternatifs à l'utilité espérée . . . . .	28
2.2 Le modèle de Blavatsky : un modèle de choix binaire probabiliste . . . . .	35
2.2.1 Formalisation du modèle . . . . .	36
2.2.2 Caractérisation axiomatique du modèle . . . . .	38
2.2.3 Application du modèle à notre problématique . . . . .	39

2.2.4	Extension d'un modèle binaire à un modèle à plusieurs alternatives . . .	42
2.3	Calibrage de la décision des assurés . . . . .	48
2.3.1	Une base de données réelles volumineuse et fiable . . . . .	48
2.3.2	Rendement et volatilité du fonds en UC . . . . .	53
2.3.3	Calibrage des paramètres du modèle de Blavatsky . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Programme d'optimisation de l'assureur</b>	<b>69</b>
3.1	Réponses aux bonus et programme de l'assureur . . . . .	69
3.1.1	Une campagne d'incitation à la réorientation de l'épargne vers les UC .	69
3.1.2	Sensibilités par rapport à la solution de bonification . . . . .	72
3.1.3	Programme de l'assureur . . . . .	79
3.1.4	Un bonus graduel selon la part en UC . . . . .	83
3.1.5	Distribution globale du portefeuille et taux servi moyen par produit . .	90
3.2	Combinaison de la solution proposée avec d'autres incitations financières . . .	96
3.2.1	Différenciation des frais . . . . .	96
3.2.2	Différenciation des frais et bonus . . . . .	98
3.2.3	Contrainte sur l'encours . . . . .	103
3.2.4	Différenciation des frais et contrainte sur l'encours . . . . .	106
3.3	Alternatives au modèle retenu . . . . .	108
3.3.1	Pistes d'améliorations . . . . .	108
3.3.2	Théorie de la décision intertemporelle . . . . .	110
3.3.3	Alternative au cadre normatif : les modèles comportementaux . . . . .	111
	<b>Conclusion</b>	<b>113</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>i</b>
	<b>Annexe : Axiomatique de Savage et limites</b>	<b>iii</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>viii</b>
	<b>Liste des tableaux</b>	<b>x</b>



# Introduction

Les rendements des fonds en euros sont en baisse depuis plusieurs années suite à l'érosion des rendements obligataires. En effet, les fonds en euros sont composés essentiellement d'obligations d'Etat et d'obligations d'entreprises, et par conséquent ne peuvent pas fournir plus de rendement que les titres obligataires dont ils sont constitués.

Ce contexte de taux bas représente un défi majeur pour les assureurs qui sont dans l'obligation d'honorer leurs engagements contractuels envers leurs clients. En particulier, au niveau des taux minimums garantis (TMG) qui peuvent être très élevés pour certains anciens contrats, et constituent un besoin en capital non négligeable dans un environnement de taux bas. Pour faire face à la dégradation de la rentabilité des fonds en euros, une première solution serait de réorienter le placement des actifs vers des actifs plus risqués. Cependant cette solution est fortement pénalisée par la Directive Solvabilité II.

Les assureurs ont donc été amenés à limiter la collecte en fonds en euros. De nombreuses campagnes commerciales ont effectivement été initiées dans ce sens. Par exemple la suppression des frais d'entrée des contrats multisupports excédant un certain seuil en unités de compte (UC). Cependant, cette solution concerne uniquement les nouveaux contrats. Elle n'affecte pas les anciens contrats qui représentent un défi pour l'assureur, du fait de leur TMG plus élevé.

Pour compenser l'effet des taux bas, l'assureur peut mutualiser la richesse entre assurés grâce au dispositif de la politique de participation aux bénéfices (PB). Pour un même portefeuille, certains contrats possèdent des TMG plus élevés que d'autres. En effet, le minimum de PB dépend du rendement des placements financiers de tout le portefeuille mais la revalorisation réglementaire est distribuée à tous les contrats. Néanmoins, cette distribution de richesse peut provoquer des phénomènes de rachats si les rendements ne sont pas considérés comme compétitifs par rapport à la concurrence ou à des investissements alternatifs.

L'une des solutions serait d'inciter les assurés déjà présents dans le portefeuille à arbitrer vers des supports plus risqués que les fonds en euros. Pour ce faire, les assureurs ont plusieurs leviers à leur disposition, notamment la politique de participation aux bénéfices, qui est un outil de pilotage très efficace. Les assureurs proposent une bonification du rendement des contrats favorables à l'assureur, si le contrat dépasse par exemple un certain seuil d'UC ou s'il y a arbitrage en faveur des UC.

Toutefois, le pilotage d'une telle stratégie reste très complexe du fait de l'intervention de plusieurs paramètres : part d'assurés effectuant les arbitrages, appétence au risque des clients et la propension des gens à répondre effectivement à ces incitations.

L'objectif de ce mémoire est de proposer une modélisation de la réponse des assurés à de telles incitations financières. Dans ce mémoire, nous allons présenter une approche permettant de modéliser le programme d'optimisation de l'assureur sous plusieurs contraintes notamment celles liées aux préférences des clients. Après avoir rappelé les principales notions d'assurance vie liées à notre problématique, nous présenterons les concepts de base de la théorie de décision, utiles pour la formalisation de notre modèle. Spécifiquement, nous adoptons un modèle de choix probabiliste où, contrairement aux modèles déterministes de la théorie de la décision, un même agent peut prendre des décisions différentes même dans des contextes exactement identiques. Finalement nous présenterons l'application de la modélisation retenue à nos données ainsi que les résultats obtenus.

# Chapitre 1

## Cadre et objectifs de l'étude

Dans ce premier chapitre, nous exposons le cadre dans lequel est effectué ce mémoire, à savoir l'activité de l'épargne en assurance-vie. Le principe de l'assurance-vie est exposé en général avant de détailler la typologie des contrats en épargne, à savoir les contrats en euros, en unités de compte (UC) et les contrats multisupports. L'étude menée dans le cadre de ce mémoire concerne un portefeuille de contrats multisupports. Nous explorons quelques solutions commerciales proposées pour réorienter l'épargne vers les fonds en UC, avant de présenter les objectifs de l'étude.

### 1.1 Présentation de l'assurance-vie

L'assurance-vie est un contrat à travers lequel l'assureur s'engage à verser des prestations (en rentes ou capital) à un ou plusieurs bénéficiaires, moyennant un paiement de primes par le souscripteur ou l'assuré, en cas de réalisation d'un évènement déclencheur lié à la durée de vie de l'assuré (décès ou survie de l'assuré). En fonction du risque assuré, nous distinguons deux types de contrats d'assurance-vie :

- **Assurance en cas de vie** : les prestations sont versées en cas de vie de l'assuré à l'échéance du contrat.
- **Assurance en cas de décès** : les prestations sont versées à un bénéficiaire en cas de décès de l'assuré avant l'échéance du contrat.

L'assurance-vie est une famille de produits qui répond à plusieurs besoins du souscripteur (l'assuré). Nous retiendrons principalement les trois familles de produits : l'épargne, la retraite et la prévoyance.

- **L'épargne** : permet de faire fructifier et de sécuriser le capital de l'assuré. En effet, les primes versées au fil du temps sont investies sur un portefeuille diversifié d'actifs. Un mécanisme de participation aux bénéfices permet de profiter des mouvements favorables des marchés, tandis que l'existence d'un taux minimum de revalorisation

garanti permet de sécuriser le capital. De plus, l'assurance bénéficie d'un cadre fiscal avantageux favorisant les transmissions patrimoniales.

- **La retraite** : permet à l'assuré de compléter sa retraite grâce à des rachats partiels mensuels ou trimestriels afin de maintenir son niveau de vie.
- **La prévoyance** : permet à l'assuré de se protéger ainsi que ses proches par le versement d'un capital ou d'une rente en cas de survenance d'un événement aléatoire (décès, maladie, incapacité etc.).

En France, l'assurance en cas de vie est un contrat rarement utilisé. En pratique, ce qui est appelé assurance-vie est un contrat d'assurance décès avec une contre-assurance, c'est-à-dire le remboursement des primes versées pendant la durée du contrat en cas de vie de l'assuré au terme du contrat.

Dans notre étude, nous nous intéressons aux produits d'assurance-vie de la famille épargne au sein de laquelle on peut distinguer deux produits : les fonds en euros et les fonds en unités de compte.

### 1.1.1 Les contrats d'épargne

Dans la famille épargne nous distinguons principalement entre deux types de contrats : les contrats en fonds en euros dits euros et les contrats en unités de compte dits UC.

#### Les contrats d'assurance-vie en euros

Les **fonds en euros** sont des fonds d'investissement qui s'adressent à des épargnants souhaitant protéger leur capital. En effet, le capital est garanti par l'assureur et l'assuré récupère son capital de départ augmenté des intérêts capitalisés au fil du temps. Le capital garanti ne peut donc pas diminuer et augmente en fonction du rendement annuel. Par conséquent, le risque financier pour ce type de supports est porté par l'assureur. Le rendement annuel des fonds en euros est composé de deux éléments : le taux minimum garanti et la participation aux bénéfices. Les fonds en euros sont composés essentiellement d'obligations qui assurent une régularité de rendements.

#### Les contrats d'assurance-vie en UC

Les contrats en **unités de compte** sont des contrats d'investissement au sein desquels l'épargne est investie en des supports de nature différente à l'instar des actions, obligations et parts de fonds communs de placement. Ces supports ont été conçus pour répondre à un besoin de rendement plus élevé par rapport aux fonds en euros. Ils ne sont pas libellés en euros mais en parts dont la valeur fluctue en fonction du marché. L'assureur garantit à l'assuré le nombre de parts sans s'engager sur leur valeur, le risque financier lié est donc assumé par l'assuré qui supporte les moins-values et perçoit entièrement les plus-values. Les contrats en

UC sont parfois appelés des contrats à capital variable. Pour limiter les pertes, les assureurs proposent des garanties supplémentaires comme la garantie plancher ou la garantie cliquet.

D'autres types de contrats existent en assurance-vie comme par exemple les bons de capitalisation et les fonds euro-croissance.

Un souscripteur a la possibilité de choisir un contrat monosupport ou multisupport. La différence entre les contrats **monosupports** et les contrats **multisupports** relève du nombre de supports sur lesquels est investie l'épargne de l'assuré. Sur un contrat monosupport, l'intégralité du capital de l'assuré est investie dans des actifs de même nature. Les multisupports sont investis sur différents supports, ils accordent aux assurés la possibilité de sécuriser leur épargne tout en profitant de la performance des marchés financiers. En effet, l'assuré peut réaliser des arbitrages entre fonds en euros et fonds en UC pour optimiser ses rendements en fonction de son profil de risque, de ses objectifs et de l'évolution des marchés financiers. Dans le cadre de ce mémoire, nous traitons les contrats de type **multisupports**.

### 1.1.2 Quelques notions d'assurance-vie

Dans la section précédente, les principaux contrats d'assurance-vie ont été décrits dans le but de donner au lecteur une vision globale du contexte assurantiel. Pour présenter **la politique de participation aux bénéfices** nous introduisons quelques notions nécessaires à notre étude.

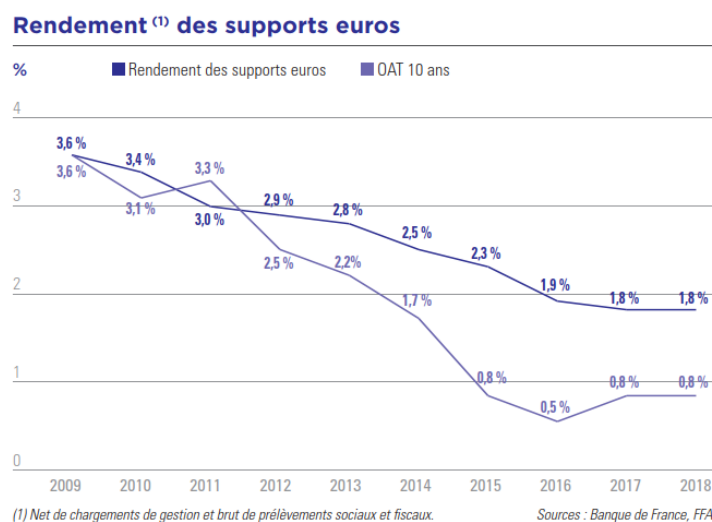
#### Taux minimum garanti (TMG)

C'est le rendement financier minimum garanti par le contrat, il est fixé, contrat par contrat, chaque année par l'assureur sans excéder 85% du rendement des actifs de l'assureur au cours des 2 derniers exercices<sup>1</sup>. Ce taux est déterminant car, ajouté à la PB, il représente la rémunération des fonds en euros en plus de la participation aux bénéfices. Le TMG se présente donc comme une borne inférieure du taux servi aux assurés, que l'assureur doit respecter quels que soient les performances réalisées et les rendements obtenus. Ainsi, c'est un paramètre contractuel clé pour l'assureur qui doit être capable d'honorer ses engagements en fin d'année et rester compétitif sur le marché.

Le graphique suivant présente l'évolution des rendements des supports euros durant les dix dernières années.

---

1. Art. A.132-1 et A. 132-3 du Code des Assurances



**FIGURE 1.1** – Rendement des supports euros. *Source : Fédération Française de l'Assurance.*

Nous remarquons que les rendements sont en baisse continue depuis dix ans avec une stabilité entre 2017 et 2018 à une valeur de 0,8%. En effet, les assureurs offrent des TMG de plus en plus faibles pour faire face à l'environnement de taux bas, la plupart étant désormais nuls, voir nuls brut de frais. Cependant, la baisse globale des rendements n'est pas entièrement imputable à la baisse des TMG mais également à la dilution des rendements du portefeuille obligataire qui diminue du fait la participation aux bénéfices. Le réinvestissement de la collecte nette et des coupons (des obligations anciennes arrivées à maturité) est effectué à des taux faibles sous l'effet de la baisse des taux longs. Par conséquent, la dilution du rendement des portefeuilles obligataires est plus précipitée que la dilution des portefeuilles à TMG élevé.

### L'option d'arbitrage

En assurance-vie, l'option d'arbitrage est l'une des caractéristiques des contrats multisupports. C'est une opération par laquelle l'assuré a la faculté de réorienter une partie ou la totalité son épargne vers d'autres supports disponibles. Il s'agit d'une réallocation de l'épargne du contrat car le capital investi n'est pas modifié. Certains contrats n'autorisent l'option d'arbitrage qu'à partir d'un certain montant. De plus, certains assureurs limitent le nombre d'arbitrages alors que d'autres accordent au souscripteur le droit d'effectuer des arbitrages à n'importe quel moment.

Les arbitrages sont généralement assortis de frais prélevés par l'assureur et éventuellement de restrictions concernant, par exemple, les montants des arbitrages ou la non éligibilité de certains supports aux arbitrages. Ces restrictions sont définies aux conditions générales des contrats. Un arbitrage peut être manuel et ponctuel, ou bien il peut être automatique et inscrit dans le contrat. Ces frais sont calculés soit de manière proportionnelle à la somme arbitrée, soit forfaitairement.

## Les différents modes de gestion

Plusieurs contrats multisupports proposent différents modes de gestion :

- **La gestion libre**

Le souscripteur gère lui-même son épargne. Ainsi, l'épargnant choisit lui-même la répartition de son capital entre le support euros et le(s) unité(s) de compte. C'est le mode de gestion par défaut des contrats d'assurance-vie multisupports.

- **La gestion profilée ou pilotée (ou sous mandat)**

Le souscripteur ne gère pas activement son contrat et délègue à l'organisme gestionnaire selon son profil et ses objectifs. Pour un profil prudent par exemple, les produits obligataires et monétaires seront privilégiés, contrairement à un profil dynamique qui va favoriser l'investissement en actions.

- **La gestion à horizon**

Pour ce mode de gestion, l'assureur répartit l'épargne entre différents supports, plus ou moins risqués, en tenant compte d'une date précise. Cette date peut correspondre par exemple à la date de départ en retraite de l'assuré. La répartition évolue en fonction de l'approche de la date ciblée. Pour le cas d'un départ en retraite, la répartition se fera davantage prudente à mesure de l'avancée en âge du souscripteur.

### 1.1.3 Politique de participation aux bénéfices

L'assureur est tenu de reverser une majeure partie des bénéfices aux assurés. Ce reversement ne peut être inférieur à 85% des bénéfices financiers (générés de la plus-value des placements des capitaux des assurés). Par ailleurs il a l'obligation de verser 90% des bénéfices techniques qui proviennent de la différence entre les frais réels et les frais prélevés à l'assuré et des bénéfices dits de mortalité constatés par différence avec les tables de mortalité. Ces deux compartiments forment ce qu'on appelle le minimum de participation aux bénéfices.

La provision pour participation aux bénéfices (PPB) est une réserve qui permet de lisser le résultat de l'assureur sur plusieurs années en fonction des contraintes de type réglementaire ou commercial (taux servis par la concurrence). Ainsi, la PPB appartient aux assurés et est déterminée en fonction des résultats en fin d'année.

La PB réglementaire minimale détermine la part des richesses qui doit obligatoirement aller aux assurés. Elle est répartie librement entre une revalorisation immédiate et une dotation à la PPB. Cette dernière provision doit être reversée aux assurés sous huit ans. Bien que l'assureur n'a aucune obligation d'insérer des clauses contractuelles dans un contrat d'assurance-vie, la plupart des contrats en ont. La PB contractuelle désigne le montant défini contractuellement, l'assureur est donc contraint d'appliquer les clauses de revalorisation explicitées dans le contrat.

Ainsi, la politique de PB est un mécanisme qui définit comment la richesse est distribuée aux assurés par l'assureur. L'assureur est libre de distribuer une part des rendements des produits financiers à tous ou à une partie des clients. Elle sert d'outil de pilotage de la compagnie d'assurance. En effet, l'assureur décide chaque année du budget de la PB à distribuer selon le taux concurrent et la marge qu'il souhaite préserver. Le taux de revalorisation ou taux servi est donc un taux d'intérêt composé du rendement garanti (TMG) et de la participation aux bénéfices techniques et financiers du contrat.

Il peut donc gérer intelligemment cette PB pour optimiser son portefeuille et maximiser par exemple la réorientation de l'épargne vers les fonds en UC, en mettant en place à court-terme une politique d'incitation basée sur une évolution de la politique de taux servi.

La politique de taux servi est révisée au moins une fois par an, et lors de tout changement significatif impactant l'exercice en cours. L'objectif de notre étude est de caractériser une solution d'incitation financière d'arbitrage vers les UC à travers la PB. Notre réflexion va donc porter sur une politique de bonification de la revalorisation.

Pour garantir à tout moment le règlement intégral de ses engagements vis-à-vis des assurés et de ses bénéficiaires, l'assureur constitue une réserve de fonds qu'on appelle provision mathématique. La PM est définie comme la différence entre la valeur actuelle probable (VAP) des engagements pris par l'assureur et l'assuré :  $PM(t) = VAP_{assureur}(t) - VAP_{assuré}(t)$ .

Dans le cas d'assurance-vie, l'encours des contrats est composé des provisions mathématiques en plus des provisions pour participation aux bénéfices.



## 1.2 Un objectif d'arbitrage vers les UC

### 1.2.1 Quelques solutions commerciales explorées

Depuis quelques années, pour réorienter l'épargne vers les unités de compte, certains assureurs font appel à des politiques d'incitation financière à l'investissement sur les UC. Nous présentons dans ce qui suit quelques pratiques commerciales visant à favoriser la réorientation de l'épargne vers les fonds en UC

#### Primes de bienvenue

Une pratique courante chez les assureurs consiste à offrir une prime en euros lors de la souscription d'un nouveau contrat, qui est conditionnée généralement à un niveau d'encours ou à une part minimale souscrite en unités de compte. Ces offres concernent principalement les contrats multisupports des acteurs de l'assurance-vie en ligne.

À titre d'exemple, Fortuneo Vie<sup>2</sup> propose :

- une prime de 200 € pour une première adhésion, conditionnée par un versement initial d'au moins 5 000 € investi à 30 % au moins en unités de compte non garanties en capital ;
- ou bien une prime de 150 € pour une première adhésion au contrat Fortuneo Vie avec un versement initial de 3 500 € minimum investis à 30 % au moins en unités de compte non garanties en capital.

#### Réduction des frais

Certains assureurs pratiquent des campagnes de réduction des frais sur les versements conditionnée à une part minimale soucrite en fonds en UC. Ces frais peuvent être appliqués aux versements initiaux, complémentaires ou versements réguliers.

BNP Paribas propose régulièrement une offre sur son contrat multisupport « Multiplacements 2 ». Pour l'offre épargne 2019 (du 2 janvier 2019 au 30 avril 2019), les versements avec une part minimum de 25% sur des supports en unités de compte bénéficient de frais d'entrée réduits au taux de 1% (contre 4,75% à 3,5% dans les conditions générales du contrat).

---

2. une filiale du Crédit Mutuel Arkéa

## Bonus sur rendement

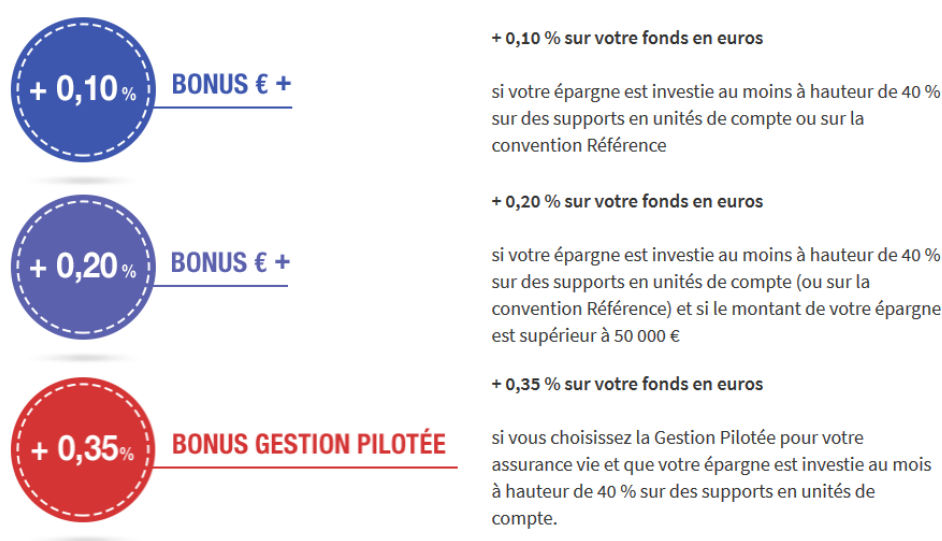
En 2010, AXA, l'un des plus gros assureurs français, initie une politique de rémunération qui consistait à offrir un rendement bonifié sur le fonds en euros sous condition d'encours ou de part en UC. Par la suite, cette politique a été reprise par plusieurs acteurs de l'assurance-vie sous plusieurs formes.

Selon les campagnes proposées, la bonification possède plusieurs caractéristiques :

- Cible : concerne généralement l'encours, le versement ou l'arbitrage.
- Conditions d'éligibilité : impliquent principalement le niveau d'encours et la part souscrite en UC.
- Niveau de bonification : les niveaux varient généralement entre 0,10% et 1% selon les assureurs.

L'offre de bonification est conditionnelle au respect des conditions générales des contrats, à un horizon défini généralement à un an. Cependant, certains assureurs s'engagent sur plusieurs années. BNP Paribas dans son offre « bonus Pep's 2019/2020 » prévoit des bonifications sur la base des versements au titre des exercices 2019 et 2020.

Nous présentons ci-dessous un exemple de campagne de bonification ayant été mise en pratique lors des années 2018 et 2019 : l'offre « Bonus Euro + » d'AXA



**FIGURE 1.2** – Exemple d'un rendement bonifié : « Bonus Euro + ». *Source : Produits assurance-vie d'AXA.*

À travers cette offre, AXA souhaite d'une part, orienter sa clientèle vers les fonds en UC en fixant une part minimale souscrite en UC et d'autre part différencier sa clientèle haut de gamme en conditionnant le niveau d'encours. Dans le cadre de cette offre, AXA réserve 0,10% de bonus sur le fonds en euros si la part souscrite en fonds en UC est au moins égale à 40% et 0,20% si en plus de la part minimale en UC, l'encours est supérieur à 50 000 €. De plus, AXA offre un bonus de 0,35 % si le souscripteur choisit la gestion pilotée.

En outre, l'assureur exprime une volonté de démocratisation de la gestion pilotée qui n'était accessible qu'à certains contrats du fait de son coût élevé. Le but est de favoriser les alternatives aux fonds en euros le plus rapidement possible. Ainsi, les options de gestion pilotée se présentent comme un moyen pour rassurer les investisseurs dans un marché encore peu éduqué aux produits financiers.

Le but de ce mémoire est de modéliser la réponse des assurés à une incitation du type bonus sur rendement. Nous cherchons à probabiliser les décisions des assurés concernant la répartition de leurs contrats d'assurance-vie multisupports.

## Évolution des conditions générales des contrats

Pour faire face à la baisse des taux, plusieurs assureurs opèrent des évolutions dans les conditions générales de leurs contrats. Nous présentons ci-dessous quelques exemples :

- Le passage à un TMG brut de frais de gestion.  
Depuis début mai 2016 Generali Vie, qui est un acteur majeur de l'assurance-vie en France, a modifié les conditions générales de certains de ses nouveaux contrats et dorénavant le capital est garanti **brut** de frais de gestion et non plus **net**. En effet, si la performance brute du fonds devenait inférieure aux frais de gestion, le rendement servi aux assurés deviendrait négatif.
- Une modulation des frais de gestion entre fonds en euros et fonds en UC. Le fait d'augmenter les frais sur versements en fonds en euros incite les épargnants à verser en fonds en UC.
- Changement de la politique de souscription en imposant une part minimale souscrite en fonds en UC. Derrière ce choix, se dessine une volonté de maîtriser la collecte des fonds en euros en plafonnant les versements de ces derniers.

## 1.2.2 Les préférences des Français

Les Français ont généralement une gestion prudente de leur épargne et préfèrent les fonds en euros aux fonds en UC. Une étude d'AXA Investment Managers<sup>3</sup> confirme le comportement très prudent en termes de choix de placement des Français. Cette prudence d'investissement est observable dès l'âge de 30 ans selon cette même étude. Les Français privilégient une épargne de précaution aux rendements des supports considérés risqués. En effet, 75% des épargnants Français préfèrent ne rien gagner plutôt que de prendre un risque de perte.

Selon les auteurs, cette aversion aux pertes n'est pas en adéquation avec les objectifs de rendement des épargnants. Par exemple, les Français constituent une épargne pour des objectifs à moyen ou long terme comme la retraite, cependant, ils restent sur des supports d'investissement à court terme à faible rentabilité qui les éloignent de leurs objectifs. De plus, selon la même étude, cette appréhension du risque est renforcée par le manque d'éducation financière chez les épargnants.

Cette prudence se traduit également en pratique par une détention très élevée de produits garantis et sans risque. Les statistiques de la Banque de France sur la répartition des placements financiers des ménages présentées ci-dessous le confirment.

ENCOURS EN MILLIARDS D'EUROS, FIN 2018

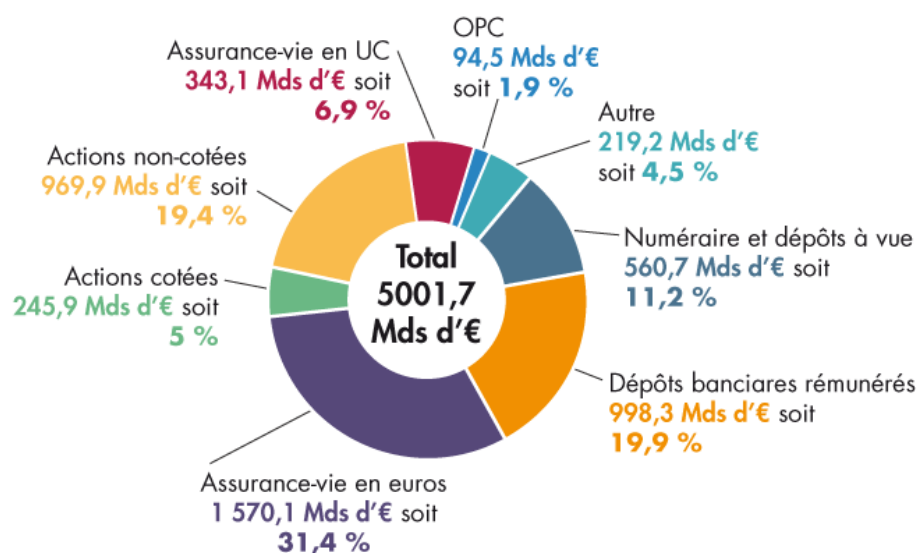


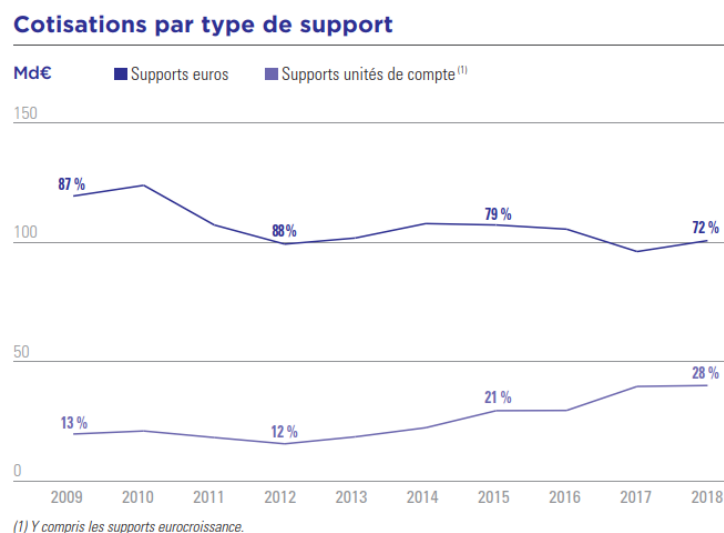
FIGURE 1.3 – Répartition des placements financiers des ménages. *Source : Banque de France.*

Ces statistiques montrent que les Français préfèrent les placements sans risque aux placements en actions. Ceci souligne encore une fois la volonté des épargnants Français à constituer une épargne de précaution. Nous remarquons également que la part des actions non cotées en

3. « Comment les Français placent-ils leur argent ? » Enquête épargnants 2018 - AXA Invest Managers

plus des actions cotées constituent le deuxième plus gros placement après l'assurance-vie en euros. Ceci est dû aux avantages fiscaux que présente le placement en actions non cotées sur un plan d'épargne en actions.

Le graphique ci-dessous présente les cotisations en assurance-vie par type de support pendant les dix dernières années.



**FIGURE 1.4** – Cotisations par type de support. *Source : Fédération Française de l'Assurance.*

Nous remarquons que les cotisations en euros sont nettement supérieures à celles des UC. Cependant, les cotisations en UC suivent une tendance haussière qui peut être expliquée par plusieurs facteurs dont le plus important est le contexte des taux bas. La culture de l'épargne sans risque persiste encore en France, malgré la progression des cotisations en fonds en UC, la part des actifs risqués reste faible par rapport aux fonds à capital garanti.

### 1.2.3 Un outil de pilotage puissant mais complexe à prévoir

L'assureur a pour but de maximiser un objectif bien précis. Sa population cible est l'ensemble clients déjà présents en portefeuille. Il souhaite les inciter à arbitrer leur épargne en euros vers des UC. Pour ce faire, il envisage de créer une campagne d'incitation financière de type bonus sur rendement qui vise à rémunérer les contrats favorables de manière générale à l'assureur. Dans notre cas, l'assureur cherche par exemple à rémunérer les contrats de ceux qui arbitrent de telle manière à atteindre une part en UC cible de l'assureur ou ceux qui ont arbitré en faveur des UC avec une variation minimale définie par l'assureur. Il cherche à maximiser la probabilité que la part d'UC globale de son portefeuille soit supérieure ou égale à une part en UC cible notée  $uc^*$ .

Le pilotage d'une telle stratégie est complexe car d'une part les paramètres sont nombreux : les paramètres du programme de l'assureur (seuils et bonus correspondants) ainsi que l'appé-

tence au risque des clients. D'autre part, la propension des assurés à répondre effectivement à une telle incitation financière représente la difficulté principale de la modélisation.

L'assureur cherche à mettre en place à court-terme une politique d'incitation basée sur une évolution de la politique taux servi. Notre réflexion va donc porter sur une politique de bonification de la revalorisation. Il s'agit alors de modéliser et de résoudre le programme d'optimisation de l'assureur sous plusieurs contraintes à l'instar du respect de l'appétence au risque des clients. Quels sont les seuils d'éligibilité aux bonus ainsi que les bonus optimaux à appliquer au portefeuille pour maximiser la proportion ?

Dans le cadre de notre étude, nous nous intéressons seulement aux arbitrages entre un fonds en euros et un fonds en UC. Nous supposons que l'horizon d'investissement est d'un an. On s'intéresse donc à l'évolution de la richesse de l'assuré en fonction de la part en UC  $w$  :

$$X(w) = PM \times (1 - w) \times (1 + TMG + PB(w)) + PM \times w \times (1 + R_{UC})$$

Où  $PB(w)$  représente la revalorisation du fonds en euros, qui dépendra du programme de revalorisation de l'assureur et où  $R_{UC}$  est la variable aléatoire représentant les rendements du fonds en UC.

Dans ce chapitre, nous avons vu que la PB est encadrée par la réglementation. Plus largement, la gestion de cette PB est laissée libre aux assureurs eux-mêmes à travers leurs clauses contractuelles et leurs stratégies de pilotage. Nous avons ensuite présenté le contexte de l'étude en mettant en évidence l'état de l'art des politiques d'incitation à l'investissement sur les UC. La suite de ce mémoire s'articule autour de la modélisation des comportements des assurés face à une politique de rémunération de type bonus sur rendement en utilisant la théorie de décision. Quels sont les modèles de base de la théorie de décision ? Comment choisir un modèle de décision adapté à notre problématique ?

# Chapitre 2

## Modélisation de la réponse des assurés

Le comportement des assurés est un facteur de risque pour l'assureur. Sa modélisation peut permettre de mettre en place des politiques qui peuvent faire gagner l'assureur. Les assureurs investissent des efforts considérables dans la création de politiques et de produits. Ces derniers sont créés en fonction de la manière dont les assureurs pensent que les assurés prennent des décisions, tout en maximisant les intérêts de l'assureur sous plusieurs contraintes comme le respect du devoir de conseil. Cependant, ces hypothèses sont établies sans forcément chercher à modéliser le comportement des assurés de manière fine.

Les compagnies d'assurance, conscientes de l'enjeu du comportement des assurés, cherchent de plus en plus à implémenter des méthodes pour comprendre, puis expliquer le comportement humain pour éventuellement influencer la prise de décision économique. Le but serait d'appliquer ces techniques à des problématiques pratiques des comportements de rachats ou d'arbitrage entre fonds en euros et en UC.

Pour modéliser l'attitude des assurés face à un ensemble de décisions, le cadre de l'utilité espérée constitue le cadre classique pour une telle problématique. Dans ce mémoire, il s'agit alors de mettre en oeuvre **la théorie de la décision** pour optimiser un objectif de l'assureur bien précis. Plus particulièrement, nous cherchons à modéliser la réponse des assurés à une incitation financière de type bonus sur rendement dans le cadre d'une politique de taux servi. Nous cherchons à déterminer quels seraient les paramètres optimaux pour une telle politique.

La théorie de la décision est une approche interdisciplinaire permettant de prendre les décisions les plus avantageuses dans un environnement généralement incertain. En effet, cette théorie associe la psychologie, la statistique, la philosophie et les mathématiques pour analyser le processus de prise de décision.

Elle s'intéresse au raisonnement sous-jacent aux choix d'un agent <sup>1</sup>, qu'il s'agisse d'un choix banal entre prendre le bus ou un taxi, ou d'un choix plus ambitieux quant à l'opportunité de poursuivre une carrière politique exigeante. Selon la norme, ce que fait un agent à une

---

1. Notez que le terme « agent » désigne ici une entité, généralement une personne individuelle ou morale, capable de délibération et d'action.

occasion donnée est complètement déterminé par ses croyances et ses désirs ou valeurs. En tout état de cause, la théorie de la décision est autant une théorie de croyances, de désirs et d'autres attitudes pertinentes qu'une théorie de choix.

Ce qui compte, c'est la manière dont ces diverses attitudes (appelées « attitudes de préférence ou préférences ») coexistent.

La théorie de décision consiste deux domaines principaux :

1. **Descriptif** : ce champ d'études explore comment les individus prennent leurs décisions sur la base de l'observation du comportement de vrais décideurs.
2. **Normatif** : ce champ d'études permet de définir des principes que les preneurs de décisions doivent suivre afin d'effectuer un choix dit « rationnel » c'est-à-dire le choix qui rapporte le plus de bien-être au décideur.

Le premier domaine d'application de la théorie de la décision est très intéressant pour l'assurance. En effet, les assureurs agissent en fonction de la manière dont ils pensent que les assurés devraient prendre des décisions, en un sens normatif, plutôt que d'agir en fonction de comment les assurés prennent leurs décisions réellement. Cette science comportementale peut améliorer considérablement l'efficacité dans ce domaine. Dans ce cadre, l'intérêt se porte sur ce que les gens prennent comme décision en pratique.

Cette science explore les activités et les interactions entre les assurés et leur environnement (notamment l'assureur), par le moyen d'observations contrôlées et naturelles et des expérimentations scientifiques rigoureuses pour déboucher à la fin sur des conclusions légitimes.

Les théories de décision normatives fournissent des recommandations sur la manière dont les gens devraient prendre des décisions de manière conditionnelle à un ensemble de valeurs. Elles fournissent des fonctions normatives ou des règles de décision pour aider les personnes à augmenter leur bien-être. Les règles normatives servent de normes auxquelles les comportements réels des personnes sont comparés. Dans ce cadre, il s'agit de déterminer comment les gens devraient se comporter sans se soucier si cela est possible en pratique.

La plupart des théories de la décision sont normatives et visent donc à donner la meilleure décision à prendre, en supposant un décideur, parfaitement ou partiellement informé (selon les modèles). L'hypothèse sous-jacente de certains de ces modèles est qu'une décision optimale pourrait être prise de manière rationnelle et mathématique.

Dans notre cas, nous nous situons dans le cadre normatif. Du côté de l'assureur nous cherchons à maximiser la probabilité que les assurés détiennent une part en UC cible de l'assureur à travers l'analyse des politiques d'incitation financière. Cette maximisation doit être effectuée tout en respectant les préférences des assurés, pour finalement prescrire une solution de bonification de rendement.



## 2.1 Théorie de la décision : une approche de modélisation du comportement des assurés

Après avoir présenté dans la partie précédente la politique de participation aux bénéfices, il convient désormais de définir les concepts de base (nécessaires à notre étude) des modèles de théorie de la décision pour formaliser le modèle de choix que nous souhaitons appliquer à notre problématique.

Cette partie a pour but d'introduire au lecteur les modèles de base de la théorie de la décision et de motiver le choix du modèle adopté dans ce mémoire. Nous suivrons la pratique d'usage en théorie de la décision : en partant d'hypothèses basiques (ou axiomes) portant sur les choix d'un individu, nous arriverons à des modèles mathématiques permettant de prévoir ses décisions face à un univers de choix donné.

Nous commencerons par définir le cadre général, les notations et les objets mathématiques nécessaires pour la suite du mémoire. Nous présenterons ensuite des exemples d'hypothèses de modélisation (ou axiomes) sur les préférences des consommateurs les plus adoptées dans la littérature ainsi que leurs implications mathématiques. Nous discuterons enfin de la validité empirique de ces hypothèses et de leur cohérence avec les comportements observés.

### 2.1.1 Préférences et utilité : les premières briques

#### 2.1.1.1 Les relations binaires

Étant donné un univers de choix possibles  $\mathcal{X}$ , un individu est caractérisé par sa capacité à choisir un ou plusieurs éléments parmi un sous ensemble des éléments de  $\mathcal{X}$ . Mathématiquement, les goûts (ou les préférences) d'un agent sont représentés par une relation binaire :

**Définition :**  $R \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$  est une relation binaire de  $\mathcal{X}$  dans lui-même. On écrit  $xRy$  si  $(x, y) \in R$ .  $xRy$  peut être lu comme :  $x$  est en relation avec  $y$ . Dans notre contexte,  $R$  représentera souvent une préférence, et  $xRy$  pourra être lu comme : l'agent modélisé préfère  $x$  à  $y$ .

**Exemple :** Supposons que l'espace  $\mathcal{X}$  contienne 3 éléments,  $\mathcal{X} := \{1, 2, 3\}$ , et supposons que la relation binaire  $R$  représente un agent :

$$R := \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$$

Alors l'agent préfère l'élément 1 à 2 et préfère 2 à 3.

Parmi les propriétés d'intérêt qu'une relation binaire peut satisfaire :

**Définition :** Une relation binaire  $R$  sur  $\mathcal{X}$  est :

- réflexive si,  $\forall x \in \mathcal{X}, xRx$ .
- complète si,  $\forall x, y \in \mathcal{X}, xRy$  ou  $yRx$ .
- transitive si,  $\forall x, y, z \in \mathcal{X}$ , si  $xRy$  et  $yRz$ , alors  $xRz$ .

Une relation est complète lorsque l'agent arrive à classer n'importe quel couple de choix. En d'autres termes, il n'existe aucune situation où l'agent resterait indécis (à ne pas confondre avec les situations où il pourrait être indifférent, ce qui peut être tout à fait le cas avec une relation complète). On peut voir que toute relation complète est aussi réflexive. La troisième propriété, la transitivité, peut être vue comme un critère de cohérence : si un agent préfère l'option 1 à 2 et préfère 2 à 3, alors il devrait préférer 1 à 3, sinon, il pourrait constituer une pompe à argent. En effet : si un agent viole la propriété de transitivité, par exemple, s'il préfère 1 à 2, 2 à 3 mais préfère 3 à 1, alors : s'il dispose initialement du bien 1, on lui propose le bien 2 contre 1 plus une petite somme, puis on lui propose 3 contre 2 et une petite somme, et enfin, on lui propose 1 contre 3 et une nouvelle somme d'argent. On finit donc dans la même situation initiale, mais l'agent aura payé des sommes d'argent (pour rien).

**Exemple :** La relation  $R$  définie dans l'exemple précédent est bien réflexive : chaque élément est comparable à lui même :  $1R1, 2R2$  et  $3R3$ .

Les deux dernières propriétés (complétude et transitivité) semblent donc assez naturelles à adopter. Une relation binaire vérifiant ces deux propriétés sera appelée **une relation de préférence** et un agent dont les goûts peuvent être représentés par une relation de préférence sera dit **rationnel**. Souvent, lorsqu'il s'agit d'une relation de préférence, on note  $\succsim$  au lieu de  $R$ .

**Definition :** Une relation binaire  $\succsim$  est une relation de préférence si elle est complète et transitive.

**Exemples :**

- Dans relation d'ordre  $R$  définie plus haut sur l'espace  $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$ , la relation est bien transitive et complète, il s'agit donc d'une relation de préférence.
- L'ordre lexicographique ( $\succsim$ ) est défini sur l'espace des couples de réels  $\mathbb{R}^2$  par :

$$\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R} :$$

$$(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2) \iff [x_1 > y_1] \text{ ou } [x_1 = y_1 \text{ et } x_2 \geq y_2]$$

Ceci correspond à l'ordre suivant lequel les mots sont classés dans un dictionnaire (d'où l'appellation), mais il peut refléter des préférences dans des cas réels : l'agent priorise le bien représenté dans le premier argument du couple  $(x, y)$ , l'agent préfère une minuscule augmentation de la quantité  $x$  du bien 1 à n'importe quelle augmentation dans la quantité  $y$  du bien 2.

**La rationalité** est une hypothèse centrale dans la théorie économique et peut avoir plusieurs sens. Dans notre cadre, une décision rationnelle est conforme au résultat obtenu à

travers le raisonnement décrit par notre modèle mathématique retenu.

On parle d'environnement **risqué** (ou incertain mesurable) si l'agent qui prend la décision connaît les distributions de probabilité sur les différents états du monde possibles. Si ces distributions sont inconnues, on parle d'environnement incertain.

### 2.1.1.2 Les objets de choix : les loteries

Le cadre théorique présenté jusqu'ici est extrêmement général : l'ensemble  $\mathcal{X}$  peut contenir n'importe quel type d'objet. Ce cadre permet même de modéliser des choix dans l'incertitude. Pour le voir, supposons qu'on a un univers de choix possibles que nous notons  $\mathcal{C}$ . Pour introduire de l'incertitude, supposons que l'agent ne choisit pas entre les éléments de  $\mathcal{C}$ , mais entre des paris sur des éléments de  $\mathcal{C}$ . Par exemple, si  $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$ , on peut définir deux paris (ou deux loteries) comme suit : la loterie  $L_1$  donne l'élément  $C_1$  avec probabilité  $1/2$ , l'élément  $C_2$  avec probabilité  $1/6$  et  $C_3$  avec probabilité  $1/3$ ; la loterie  $L_2$  les éléments de  $\mathcal{C}$  avec une probabilité  $1/3$  chacun (nous noterons alors  $L_1 = (1/2, 1/6, 1/3)$  et  $L_2 = (1/3, 1/3, 1/3)$ ). Le décideur doit choisir entre ces deux options incertaines. Ainsi, pour adapter notre cadre théorique à de telles situations, au lieu de définir des préférences sur l'ensemble des choix possibles  $\mathcal{C}$ , on peut les définir sur l'ensemble des loteries sur  $\mathcal{C}$  que nous noterons  $\Delta(\mathcal{C})$  (qui sera alors l'analogie de notre  $\mathcal{X}$  précédemment).

Plus généralement, nous définissons une loterie de la manière suivante :

**Définition :** Pour un ensemble de choix déterministe fini  $\mathcal{C}$  de cardinal  $n$ , nous définissons l'ensemble des loteries sur  $\mathcal{C}$  (ou de façon équivalente l'ensemble des distributions de probabilité sur  $\mathcal{C}$ ) noté  $\Delta(\mathcal{C}) := \{L \in \mathbb{R}_+^n : L = (p_1, \dots, p_n) \text{ et } \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$ .

Si une loterie  $L$  est définie par :  $L = (p_1, \dots, p_n)$ , nous adopterons souvent l'abus de notation consistant à désigner le  $i$ ème élément de  $L$ , la probabilité que l'élément  $C_i$  soit réalisé suivant la loterie  $L$ , par  $L(C_i)$ . Aussi, nous noterons des fois la loterie qui retourne  $x_1$  avec probabilité  $p_1$ ,  $x_2$  avec probabilité  $p_2$ ... par :  $L = (p_1 : x_1, p_2 : x_2, \dots)$ .

Nous dédions cette sous-partie à la présentation de l'ensemble  $\Delta(\mathcal{C})$  des loteries car il présente plusieurs propriétés qui le distinguent des ensembles génériques de choix et qui sont exploitables mathématiquement. D'abord, quelque soit l'ensemble des choix sous-jacent  $\mathcal{C}$ ,  $\Delta(\mathcal{C})$  est un sous ensemble de  $\mathbb{R}^n$ , c'est donc un espace normé, où l'opération d'addition est définie (par opposition à un univers de choix quelconque  $\mathcal{X}$  qui peut ne pas disposer de topologie, et pour lequel les opérations usuelles ne sont pas définies). Aussi,  $\Delta(\mathcal{C})$  est un espace compact et convexe.

Une des propriétés d'une relation de préférence qu'il est pertinent d'étudier dans un contexte risqué - c'est à dire quand l'ensemble de choix est un ensemble de loteries - est l'attitude des consommateurs vis-à-vis du risque. Nous dirons qu'un consommateur est averse au risque lorsqu'il préfère toujours obtenir avec certitude un résultat  $r$  donné plutôt que

de rentrer dans un loterie qui retourne en moyenne  $r$ . On peut formuler ceci de la manière suivante :

**Définition :** Une préférence  $\succsim$  est aversive au risque si pour toute loterie  $L$  on a :  $\delta_{\mu_L} \succsim L$ , où  $\delta_x$  est la distribution de Dirac qui délivre  $x$  avec probabilité 1 quelque soit  $x$ , et  $\mu_L$  est l'espérance mathématique de la loterie  $L$ .

L'espérance mathématique de la richesse était considérée par les premiers probabilistes comme une bonne règle de décision à suivre, elle peut être utilisée pour l'évaluation de décisions individuelles sous risque. Si une loterie est définie comme une liste de résultats avec les probabilités correspondantes, alors le décideur devrait préférer la loterie avec la plus grande espérance mathématique. Au vu de la définition d'aversion au risque, ceci correspond simplement à une préférence neutre au risque.

Cette règle a ensuite été contestée par un jeu de hasard conçu par Nicholas Bernoulli en 1713, connu sous le nom du paradoxe de « **Saint-Pétersbourg** »<sup>2</sup>. Pour résoudre le paradoxe de son cousin, Daniel Bernoulli (1738) a proposé l'évaluation des loteries monétaires à l'aide d'une fonction non linéaire de résultats monétaires. Ceci fût l'une des premières apparition de ce que l'on appelle aujourd'hui fonction d'utilité : une fonction qui permet de représenter une relation de préférence.

La sous subsection suivante présente les fonctions d'utilité à la fois dans le cas d'un univers de choix général et dans le cas d'un univers incertain.

### 2.1.1.3 Représentation des préférences par une fonction d'utilité

Il existe une classe très riche de relations binaires définies sur n'importe quel univers de choix  $\mathcal{X}$  : les relations représentables par une fonction d'utilité :

**Définition :** Une fonction  $u$  représente une relation binaire  $\succsim$  sur un univers de choix  $\mathcal{X}$  si

$$\forall x, y \in \mathcal{X} : x \succsim y \iff u(x) \geq u(y)$$

Cette classe de relations est intéressante à plusieurs égards : d'abord, il est immédiat que toute relation représentable (par un fonction d'utilité) est rationnelle (grâce à la rationalité de l'ordre usuel sur  $\mathbb{R}$ ), ensuite, il est techniquement plus aisé de modéliser et de prédire le comportement d'un agent dont les préférences sont représentables. En effet, face à un espace de choix donné, un agent rationnel choisit l'option maximale au sens de sa relation de préférence, mais il nous serait extrêmement difficile de trouver cette option maximale si nous travaillions avec des préférences quelconques. Concrètement, si nous définissions une relation

---

2. Le paradoxe de Saint-Pétersbourg est un jeu théorique utilisé en économie, qui conduit à une variable aléatoire avec une valeur espérée infinie (c'est-à-dire un gain infini), mais qui semble néanmoins avoir que très peu de participants. Par conséquent, en prenant en compte uniquement la valeur attendue comme seul critère de décision, le décideur prendrait une décision qu'aucune personne raisonnable ne prendrait.

d'ordre de façon explicite (tel que nous avons défini la relation  $R$  dans l'exemple plus haut), alors trouver le meilleur choix reviendrait à chercher un maximum dans un ensemble de choix  $\mathcal{X}$  qui pourrait être de taille importante, voire infinie.

Avec des relations représentables par des fonctions d'utilité, l'option maximale n'est autre que l'option qui maximise la fonction d'utilité. La représentation nous permet donc de travailler avec des objets mathématiques plus familiers (les fonctions à valeurs réelles) plutôt qu'avec des relations binaires.

La question maintenant est de savoir si toute relation de préférence est représentable par une fonction d'utilité. L'observation suivante fournit une première réponse : toute relation binaire représentable par une fonction d'utilité est rationnelle.

L'inverse n'est pas vrai : il existe des relations de préférence qui ne peuvent être représentées par aucune fonction d'utilité. La relation d'ordre lexicographique vue dans la sous-subsection précédente est un exemple de relation de préférence qui n'est pas représentable par une fonction d'utilité.

**Définition :** Si  $\mathcal{X}$  est un espace doté d'une topologie (par exemple, si  $\mathcal{X}$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  pour un certain  $n$ ), une préférence  $\succsim$  sur  $\mathcal{X}$  sera dite continue si pour tout  $x \in \mathcal{X}$  les ensembles  $\{y \in \mathcal{X} : x \succsim y\}$  et  $\{y \in \mathcal{X} : y \succ x\}$  sont fermés.

L'exemple suivant donne l'intuition autour de la notion de continuité des relations de préférence :

**Exemple :** Considérons une tasse de café que l'on peut sucrer avec du sucre ou de l'aspartame. Un agent préfère mettre 0,5 gramme d'aspartame à 0 gramme de sucre, et il préfère 10 grammes de sucre à 0,5 gramme de d'aspartame, alors il existe une quantité  $q_s$  de sucre entre 0 et 10 grammes telle que l'agent est indifférent entre 0,5 gramme d'aspartame et  $q_s$  grammes de sucre.

Cette propriété est assez similaire au théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions réelles à valeurs réelles continues et suffit pour caractériser la continuité d'une relation de préférence.

Le théorème suivant dû à Debreu (1954) [9] donne des conditions suffisantes pour l'existence d'une fonction d'utilité.

**Théorème [Debreu (1954)] :** Toute préférence continue est représentable par une fonction d'utilité continue.

Nous ne présenterons pas la preuve du théorème ici. Il existe un cas particulier : lorsque l'univers des choix est fini, toute relation binaire est représentable. Ceci est un corollaire du théorème de Debreu vu que n'importe quel ensemble est fermé dans la topologie discrète. Cependant, ce résultat admet une preuve intuitive contournant le théorème précédent : prenons un élément quelconque de  $\mathcal{X}$ , disons  $x_1$ , et attribuons lui un nombre quelconque, par exemple  $y_1 = 1$ . En suite prenons un deuxième élément de  $\mathcal{X}$ ,  $x_2$ , si  $x_2$  est préféré à  $x_1$ , attribuons lui un nombre supérieur à  $y_1$ , par exemple  $y_2 = 2$ , sinon, si  $x_1$  est préféré, choisissons un

$y_2$  inférieur à  $y_1$ ,  $y_2 = 1/2$  par exemple. Puis passons à  $x_3$ , et attribuons lui un réel  $y_3$  tel que l'ordre entre  $y_1$ ,  $y_2$  et  $y_3$  reflète l'ordre en termes de préférence entre  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ . Puis continuons de cette manière jusqu'à parcourir tous les éléments de  $\mathcal{X}$ . Nous pouvons alors définir la fonction  $u$  sur  $X$  par  $u(x_i) = y_i$ .  $u$  représente alors notre relation de préférence. La même intuition s'applique lorsque l'ensemble  $\mathcal{X}$  est discret mais infini.

Les fonctions d'utilité sont généralement croissantes et concaves. En effet, l'utilité de l'individu croît avec sa richesse alors que son utilité marginale décroît. La concavité de la fonction d'utilité permet de représenter l'aversion au risque de l'agent. Un agent est dit aversé au risque si  $\forall R, Z$  avec  $E[Z] = 0$ ,  $E[u(R + Z)] \leq u(R)$ . On définit les coefficients d'aversion au risque absolu et relatif par :

- Le coefficient d'aversion au risque absolu :  $A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$
- Le coefficient d'aversion au risque relatif :  $A_R(x) = -x \frac{u''(x)}{u'(x)}$

Dans ce mémoire nous avons envisagé trois fonctions d'utilité principalement que nous allons exposer ci-dessous.

### Fonction d'utilité de Bernoulli

$$u = \rho \times \log(x) + b, \text{ si } x > 0$$

Bernoulli propose que la fonction d'utilité utilisée pour évaluer une loterie soit en fonction de la richesse de chacun, et pas seulement des flux de revenus actuels. Bernoulli suggère une forme pour la fonction d'utilité en termes d'équation différentielle. Il propose notamment que l'utilité marginale est inversement proportionnelle à la richesse. Si la richesse totale est exprimée en  $x$  et la fonction d'utilité en  $u(x)$ , alors :  $\frac{du(x)}{dx} = \frac{a}{x}$ .

### Fonction d'utilité CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*)

La fonction d'utilité CRRA, connue aussi sous l'appellation fonction d'utilité isoélastique,

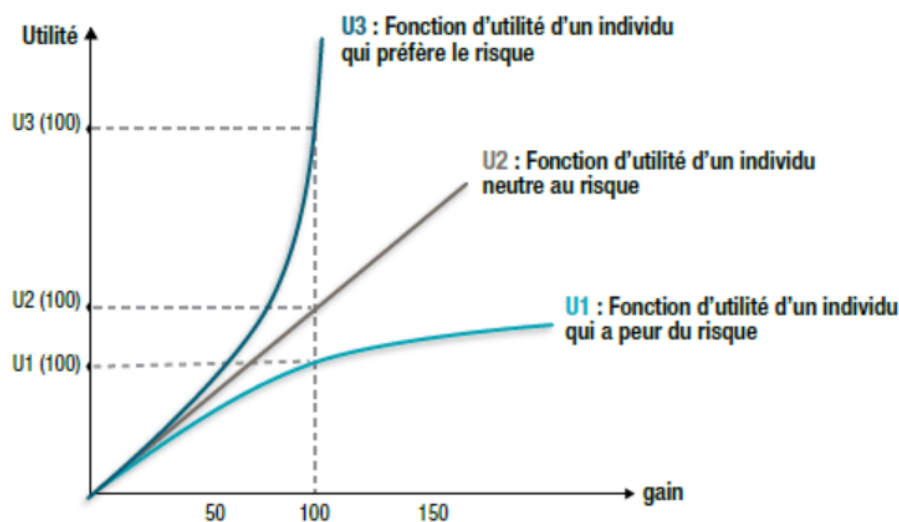
$$u = \begin{cases} \frac{x^{1-\rho}}{1-\rho} & \text{si } \rho \neq 1 \\ \log(x) & \text{si } \rho = 1 \end{cases}$$

Le paramètre  $x$  représente la consommation du décideur, nous supposons dans notre étude que la consommation coïncide avec la richesse du décideur. La fonction  $u(x)$  représente l'utilité associée à la richesse  $x$  du décideur. Le paramètre  $\rho$  est une constante qui représente l'aversion au risque des agents. Elle est positive pour les agents aversés au risque et nulle en cas de neutralité au risque (où l'utilité devient linéaire en  $x$ ).

Cette fonction d'utilité présente la caractéristique d'une aversion relative au risque constante,

ceci signifie mathématiquement, que  $A_R(x) = -x \times \frac{u''(x)}{u'(x)}$  est une constante, en l'occurrence  $\rho$ . Dans les modèles théoriques, cela implique souvent que la prise de décision n'est pas affectée par l'échelle. Par exemple, dans le modèle standard d'un actif sans risque et d'un actif à risque, avec une aversion relative au risque constante, la fraction de la richesse placée de manière optimale dans l'actif à risque est indépendante du niveau de la richesse initiale.

Le graphe suivant donne l'allure de la fonction d'utilité en fonction de différentes valeurs de l'aversion au risque  $A_R$  :



**FIGURE 2.1** – L'utilité isoélastique pour différentes valeurs de  $A_R$  Source : *Alternatives Economiques*.

La figure 2.1 donne l'allure de la fonction d'utilité *CRRA* dans différents contextes. Dans le cas d'un individu averse au risque ( $A_R > 0$ ), la fonction d'utilité est concave ( $U1$ ), tandis qu'elle est convexe ( $U3$ ) dans le cas d'un individu risquophile ( $A_R < 0$ ). Dans le cas d'un individu neutre au risque ( $A_R = 0$ ), la fonction d'utilité ( $U2$ ) est la fonction identité  $u(x) = x$  (à une transformation croissante près).

### Fonction d'utilité CARA (*Constant Absolute Risk Aversion*)

$$u = \begin{cases} \frac{1-e^{-\rho x}}{\rho} & \text{si } \rho \neq 0 \\ x & \text{si } \rho = 0 \end{cases}$$

L'utilité exponentielle implique une aversion absolue au risque absolu (CARA), avec un coefficient d'aversion absolue  $A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$  au risque égal à une constante  $\rho$ .

Dans le modèle standard d'un actif risqué et d'un actif sans risque, par exemple, cette caractéristique implique que la détention optimale de l'actif risqué est indépendante du niveau de richesse initiale; ainsi, en marge, toute richesse supplémentaire serait totalement affectée aux avoirs supplémentaires de l'actif sans risque. En d'autres termes, là où pour la CRRA la part investie en actif risqué est indépendante du niveau de richesse, pour une CARA c'est le montant absolu investi en actif risqué qui est indépendant du niveau de richesse.

## 2.1.2 Les axiomatiques

Dans le cadre de notre étude, une axiomatique est un ensemble d'hypothèses mais restrictives qui visent à limiter le champ des possibles pour pouvoir modéliser les comportements raisonnables des agents économiques. Dans le contexte de la théorie de décision, une axiomatisation fait référence à une théorie mathématique qui relie une règle de décision impliquant des concepts théoriques à des données observables. L'axiomatisation (dans ce cadre) consiste donc à se donner un ensemble non vide  $\mathcal{X}$  (ensemble des choix possibles ou alternatives) et une relation binaire sur  $\mathcal{X}$  appelée relation de préférence qui satisfait différentes conditions.

Les exemples les plus connus et les plus influents sont les axiomatiques des règles de décision de maximisation d'utilité (Debreu 1954), de l'espérance d'utilité dans un univers risqué (Von Neumann & Morgenstern 1944), et l'espérance de l'utilité subjective dans un univers incertain (Savage 1954). Dans le premier cas, le concept théorique sous-jacent est l'utilité. Dans le deuxième cas, le concept théorique sous-jacent implique l'utilité et une distribution de probabilités.

Dans ces exemples, le comportement observé est capturé par une relation binaire sur des alternatives, bien que d'autres hypothèses soient également possibles. Ces axiomatisations sont également appelées **théorèmes de représentation**. Typiquement, ceux-ci incluent également des résultats sur l'unicité de la représentation mathématique des données.

### 2.1.2.1 Axiomatique de Von Neumann & Morgenstern

Nous allons nous restreindre au cas le plus simple : le cas d'un ensemble fini de conséquences<sup>3</sup>.

Soit  $\mathcal{X}$  un ensemble fini de conséquences<sup>4</sup>  $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  de taille  $N$ , et  $\mathcal{P}$  l'ensemble des distributions de probabilité  $\mathcal{X}$ . Il s'agit donc de l'ensemble des fonctions  $p : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$  telles que  $\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) = 1$ .  $\mathcal{P}$  est un ensemble convexe tel que :

$$\forall p, q \in \mathcal{P}, \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda p + (1 - \lambda)q \in \mathcal{P}.$$

Dans le cas où l'ensemble  $\mathcal{X}$  est fini (qui est notre cas), l'ensemble  $\mathcal{P}$  des distributions de probabilités correspond à l'ensemble des loteries et peut s'écrire sous forme d'une loterie ainsi :  $p = (x_1, p_1; x_2, p_2; \dots; x_N, p_N)$  avec  $p_i = p(x_i)$ .

L'ensemble  $\mathcal{P}$  représente l'ensemble des choix du décideur car ses préférences sont reflétées par les distributions de probabilités.

$\succ$  est une relation binaire sur  $\mathcal{P}$  qui s'interprète comme une relation de préférence stricte (voir subsection 2.1.1 pour plus de détails).

---

3. Le cas d'un ensemble infini est détaillé dans la deuxième édition de l'ouvrage de Von Neumann & Morgenstern.

4. Désigne la description de tout ce qui peut arriver au décideur.



— **Axiome 1** La comparabilité (réflexivité)

$$\forall p, q \in \mathcal{P} \text{ soit } p \succ q; \text{ soit } p \prec q; p \sim q$$

Deux distributions de probabilités pourront toujours être comparées.

— **Axiome 2** La transitivité

$$\forall p, q, r \in \mathcal{P} \text{ si } p \succ q \text{ et } q \succ r \text{ alors } p \succ r$$

Cet axiome traduit une cohérence entre les classements.

— **Axiome 3** L'indépendance forte (ou de substitution)

$$\forall p, q, r \in \mathcal{P}, \forall \alpha \in [0, 1] \text{ Si } p \succ q \text{ Alors } \alpha p + (1 - \alpha)r \succ \alpha q + (1 - \alpha)r$$

Cet axiome peut être interprété de la façon suivante : une combinaison convexe de  $p$  avec une loterie  $r$  sera préférée à une combinaison similaire de  $q$  avec  $r$ .

— **Axiome 4** L'axiome d'Archimède

$$\forall p, q, r \in \mathcal{P}, \text{ si } p \succ q \succ r \text{ alors } \exists \alpha, \beta \in [0, 1] \text{ tels que :}$$

$$\alpha p + (1 - \alpha)r \succ q \succ \beta p + (1 - \beta)r.$$

Les axiomes **1** et **2** forment un préordre, une relation binaire c'est à dire réflexive et transitive. L'axiome **3** est également appelé principe de rapport commun. L'attitude d'un individu face aux deux loteries ne devra dépendre que de son attitude face à  $p$  et  $q$  et non pas de la façon d'obtenir  $p$  et  $q$ .

L'axiome **4** est plus faible que l'axiome de continuité utilisé par exemple dans le théorème de Debreu énoncé dans le premier paragraphe de ce chapitre, dans le sens où une relation continue vérifie la propriété d'Archimède. Néanmoins, quand l'espace des conséquences  $\mathcal{X}$  est fini et qu'une préférence vérifie l'axiome d'indépendance, l'axiome d'Archimède devient équivalent à l'axiome de continuité (ceci est une conséquence du théorème de représentation de VNM que nous énonçons dans la suite).

Ceci dit, dans notre contexte, l'axiome d'Archimède s'interprète de la même manière que l'axiome de continuité : une préférence est continue si elle ne présente pas de sauts (cf. la subsection 2.1.1.3 pour une discussion plus détaillée sur la continuité des préférences).

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer le théorème de représentation de la théorie de l'utilité espérée de (Von Neumann et Morgenstern) que nous allons noter dorénavant **VNM**.

### **Théorème de représentation de VNM :**

Le résultat de VNM est l'équivalence entre une famille d'axiomes sur  $\succ$  et l'existence d'une représentation de la forme  $\succ_{\tilde{u}}$ .

Sous les axiomes **1**, **2**, **3** et **4**, il existe une fonction  $u$  telle que :  $\forall p, q \in \mathcal{P}, p \succ q$  si et seulement si  $\mathbb{E}_p u(x) > \mathbb{E}_q u(x)$ .

Dans la théorie de la décision, le théorème d'utilité de VNM démontre donc que sous certains axiomes du comportement rationnel, un décideur confronté à des résultats risqués de différents choix se comportera comme s'il maximisait la valeur attendue d'une fonction définie. Cette fonction est connue sous le nom de fonction d'utilité de VNM. Le théorème est la base de la théorie de l'utilité espérée dans un univers risqué (c'est-à-dire que la probabilité de chaque évènement est connue).

### 2.1.2.2 Axiomatique de Savage

Cette axiomatique se rattache au schéma précédent dans la mesure où le critère de décision axiomatisé est bien la formule de l'utilité espérée. La seule différence est au niveau de la distribution de probabilité qui est considérée comme donnée dans le cas VNM. En effet, dans le cas VNM, l'utilité est déduite à la fois à partir des préférences sur les actes et des probabilités, tandis que dans le cadre de Savage l'utilité et la probabilité sont toutes les deux inférées à partir des préférences. L'axiomatique de Savage est présentée en annexe 3.3.3.4.

### 2.1.2.3 Quelques limites de la théorie de l'utilité espérée

Les deux axiomatiques présentées ci-dessus représentent la base de nombreux modèles de décision, cependant elles ont plusieurs limites. Nous exposons certaines de ces limites.

#### Violations de la théorie de l'utilité espérée

Des études empiriques et expérimentales remettent en cause le modèle EUT pour plusieurs considérations : l'incompatibilité des choix observés avec les prédictions théorique, la remise en cause expérimentale de l'axiome d'indépendance, etc. Les violations les plus étudiées concernent l'axiome de l'indépendance (**A-3**) et son analogue pour les probabilités inconnues (principe de la chose sûre). Deux paradoxes apparaissent comme les plus populaires de la littérature expérimentale : Allais (1953) et Ellsberg (1961).

#### Le paradoxe d'Allais et d'Ellsberg

Allais (1953) fournit le premier exemple d'une situation de choix simple dans laquelle les sujets violent systématiquement l'axiome de l'indépendance de VNM. Le tableau 2.1 présente les deux situations de choix utilisées dans l'exemple d'Allais : choix entre les possibilités  $A$  et  $B$  dans la première situation et entre  $A'$  et  $B'$  dans la deuxième situation.

	<i>Probabilités</i>		
	$p = 0.01$	$p = 0.10$	$p = 0.89$
$A$	1 m€	1 m€	1 m€
$B$	0	5 m€	1 m€
$A'$	1 m€	1 m€	0
$B'$	0	5 m€	0

**TABLE 2.1** – Paradoxe d'Allais

La combinaison de choix la plus fréquente est  $AB'$ . Pour montrer que ces préférences violent l'axiome de l'indépendance, soit  $C$  et  $D$  deux perspectives telles que  $C$  donne 5 millions d'euros avec probabilité  $10/11$  et rien autrement, et  $D$  ne donne rien avec certitude.

Par conséquent, nous avons  $A = 0.11A + 0.89A$ ,  $B = 0.11C + 0.89A$ ,  $A' = 0.11A + 0.89D$ , et  $B' = 0.11C + 0.89D$ . Selon l'axiome de l'indépendance, la préférence entre  $A$  (respectivement  $A'$ ) et  $B$  (respectivement  $B'$ ) devrait dépendre de la préférence de  $A$  par rapport à  $C$ .

Clairement, l'axiome d'indépendance implique soit la paire de choix  $AA'$ , soit  $BB'$ . D'après Allais, la certitude de devenir millionnaire incite les individus à choisir  $A$ , alors que la similarité des chances de gagner en  $A'$  et  $B'$  les encourage pour opter pour la perspective  $B'$ .

Dans ce cas, il n'est pas possible de comparer les deux loteries avec une troisième sans affecter l'ordre des préférences entre les deux premières relations, d'où la violation de l'axiome de l'indépendance. Ceci peut être expliqué par l'aversion aux pertes, l'influence de la formulation du problème ou d'autres facteurs.

Le paradoxe d'Ellsberg est l'analogue du paradoxe d'Allais dans un univers incertain. Il est présenté en Annexe 3.3.3.4. La validité empirique de la théorie de l'utilité espérée (EUT) a ses limites, les deux paradoxes cités ci-dessus en sont des exemples de comportement incompatible avec EUT non seulement dans un univers risqué mais également dans un univers incertain. Par la suite nous allons présenter des alternatives à l'EUT.

Pour aboutir à un modèle adapté à la problématique de ce mémoire nous avons effectué une revue de plusieurs modèles de la théorie de décision. Nous présentons dans la suite les modèles les plus pertinents et nous expliquons pourquoi ces modèles n'ont pas été retenus.

### 2.1.3 Revue des modèles alternatifs à l'utilité espérée

Plusieurs modèles de décision dans un univers risqué ou incertain ont été proposés dans la littérature, qui dévient de la théorie classique de l'utilité espérée, notamment les utilités dépendantes du rang pour remédier aux paradoxes de la théorie de l'utilité espérée.

Définir ce que c'est qu'un bon modèle de décision est une tâche ardue dont la résolution s'avère très complexe. Pour tenter d'y remédier, il faudrait définir la problématique d'étude, identifier les contraintes et se positionner par rapport aux études empiriques existantes.

Un travail de revue de littérature microéconomique nous a amené à sélectionner un cadre pour définir un bon modèle de décision, et en conséquence justifier notre choix de modèle probabiliste qui sera appliqué à notre problématique assurantielle.

Selon Enrico Diecidue et Peter P. Wakker qui définissent dans leur papier [10] **un bon modèle de décision** pouvant générer des applications fructueuses, comme **un modèle qui satisfait trois exigences** :

1. **Solidité mathématique** : le modèle ne doit pas exhiber des anomalies ou des violations de type dominance stochastique. (Ceci peut être garanti par l'axiomatisation)
2. **Performance empirique** : Le modèle doit permettre de valider les axiomes empiriquement.
3. **Intuitivité plausible** : Le modèle doit avoir du sens économiquement.

#### 2.1.3.1 Modèle de l'utilité dépendante des rangs

L'utilité dépendante du rang (RDU) fait partie des familles de modèles les plus populaires de décision dans un univers risqué et incertain qui dévient de la théorie de l'utilité espérée standard. Elle a été initialement introduite par Quiggin (1982) pour des décisions avec des probabilités connues (univers risqué) et par Schmeidler (1989) pour les décisions avec probabilités inconnues (univers incertain). Par la suite, RDU a été incorporée dans la version originale de la théorie de la perspective (Kahneman et Tversky 1979) donnant naissance à la théorie cumulative des perspectives (Tversky et Kahneman 1992), qui est la version la plus sophistiquée de RDU. Un modèle de type RDU permet la prise en compte des rangs des conséquences et de la transformation subjective de celles-ci. Ce modèle permet de tenir compte de certaines critiques du modèle EUT comme le paradoxe d'Allais, en présentant de façon non linéaire les probabilités.

## Formalisation brève du modèle pour le cas risqué

Pour introduire l'idée de la dépendance des rangs, considérons la loterie  $P = (p_1 : x_1, \dots, p_n : x_n)$  et supposons que l'utilité dépendante du rang (RDU) de la loterie  $P$  est donnée par :

$$RDU(p_1 : x_1, \dots, p_n : x_n) = \sum_{i=1}^n \pi_i u(x_i), \quad (2.1)$$

où  $u$  est une fonction d'utilité comme dans EUT,  $\pi_i$  des poids de décision qui dépendent de l'ordre des résultats  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Les poids de décisions  $\pi_i$  sont définis par  $\pi_i = w(p_1 + \dots + p_i) - w(p_1 + \dots + p_{i-1})$  avec  $w$  une fonction de pondération de probabilités strictement croissante de  $[0, 1]$  à  $[0, 1]$ , qui satisfait  $w(0) = 0$  et  $w(1) = 1$ . Par convention, nous supposons que  $\pi_1 = w(p_1)$ . En d'autres termes, les  $\pi_i$  sont calculés en ordonnant les conséquences de la plus défavorable à la plus favorable.

La forme de la fonction  $w$  permet de modéliser l'optimisme et le pessimisme (des phénomènes au delà de l'utilité espérée) dans l'évaluation subjective des loteries (Voir Diecidue et Wakker 2001) [10] pour plus de détails).

Pour clarifier ce point, considérons un exemple de loterie  $(\frac{1}{3} : 100\text{€}; \frac{1}{3} : 10\text{€}; \frac{1}{3} : 0\text{€})$ . Selon l'équation 2.1, les poids de décision correspondants sont :  $\pi_1 = w(\frac{1}{3})$ ,  $\pi_2 = w(\frac{2}{3}) - w(\frac{1}{3})$  et  $\pi_3 = 1 - w(\frac{2}{3})$ . Si nous supposons que la fonction de pondération  $w$  est convexe, ceci implique que le poids rattaché au pire résultat est plus élevé que le poids rattaché au meilleur résultat ( $\pi_3 > \frac{1}{3} > \pi_1$ ). La fonction de pondération de la probabilité correspond donc à une attitude pessimiste. Cette pondération de probabilité correspond à une attitude pessimiste de « risque probabiliste », qui aggrave l'aversion au risque en présence d'une fonction d'utilité concave. RDU est donc en mesure d'expliquer les violations les plus connues de l'utilité attendue, telles que le paradoxe d'Allais (explicité ci-dessus). En effet, l'utilisation d'une évaluation des RDU pour le cas du tableau 2.1 avec  $u(0) = 0$ , la préférence  $AB'$  donne :

$$\begin{cases} w(1)u(1 \text{ m €}) > w(0.1)u(5 \text{ m €}) + [(w(0.99) - w(0.1))u(1 \text{ m €})] \\ w(0.1)u(5 \text{ m €}) > w(0.11)u(1 \text{ m €}) \end{cases}$$

Ce qui implique  $w(1) - w(0.99) > w(0.11) - w(0.10)$ . Cette dernière inégalité reflète la tendance des sujets à attribuer un impact subjectif moins important au remplacement de la probabilité 0.10 par la probabilité 0.11 par rapport au remplacement de la probabilité 0.99 par la probabilité 1. En revanche, l'utilité espérée exige que ces remplacements de probabilité doivent avoir le même impact subjectif.

Plusieurs approches axiomatiques sont présentées dans la littérature pour déterminer une condition de préférence pour les RDU : (Quiggin (1982), Chew (1989), Segal (1989, 1990), Wakker (1994), Chateauneuf (1999), et Nakamura (1995)).

## Apport des modèles RDU

Les violations communément observées de la théorie de l'utilité espérée (EUT) sont gérées dans la RDU par l'introduction de poids de décision non-additifs qui reflètent ce qu'on appelle l'attitude face au hasard (*Chance attitude*) (Tversky et Wakker 1995). Elle part du constat que les préférences des individus dépendent non seulement du degré d'incertitude mais aussi de la source d'incertitude (Tversky et Wakker 1995).

Plus précisément, RDU permet la coexistence des jeux d'argent (*gambling*) et de l'assurance, ainsi que des explications de la certitude et l'effet de ratio commun. Le fait de capturer l'attitude face au hasard permet de faire dépendre les préférences individuelles non seulement du degré d'incertitude, mais également de la source d'incertitude (Tversky et Wakker 1995, page 1255).

Plusieurs chercheurs sont d'accord pour dire que RDU est intuitivement plausible. Diecidue et Wakker (2001) fournissent des arguments convaincants et intuitifs dans cette direction. Les modèles RDU sont mathématiquement solides et se basent sur l'existence d'axiomatisations permettant des représentations de préférence RDU de choix individuel (Quiggin 1982 ; Gilboa 1987 ; Schmeidler 1989 ; Abdellaoui et Wakker 2005).

RDU n'est pas seulement une bonne généralisation formelle de l'utilité attendue, mais il s'agit d'une des théories les plus convaincantes au niveau de la performance empirique sous risque et incertitude, selon plusieurs travaux (Harless et Camerer 1994 ; Tversky et Fox 1995 ; Birnbaum et McIntosh 1996 ; Gonzalez et Wu 1999 ; Bleichrodt et Pinto 2000 ; Abdellaoui, Barrios, et Wakker 2007).

## Limites des modèles RDU

Bien que cette théorie soit solide mathématiquement et remédie à plusieurs paradoxes de la théorie de l'utilité espérée classique, elle présente à son tour plusieurs violations de propriétés très importantes telles la dominance stochastique<sup>5</sup> et l'indépendance.

En effet, Michael H. Birnbaum, Jamie N. Patton et Melissa K. Lott dans leur étude qui s'intitule *Evidence against Rank-Dependent Utility Theories* (1999) [2] et Michael H. Birnbaum et Juan B. Navarrete dans une autre étude *Testing Descriptive Utility Theories* (1998) [3] montrent que les violations de ces propriétés sont incompatibles avec les modèles RDU.

Les violations de la dominance stochastique et de l'indépendance sont pour les modèles RDU ce que sont les paradoxes d'Allais et d'Ellsberg envers l'EUT. Même avec la liberté de sélectionner les fonctions  $u(x)$  et  $w(p)$ , aucun modèle RDU n'est capable d'expliquer les violations de trois propriétés importantes, la dominance stochastique, la transitivité ainsi que l'indépendance. Dans ces études, les auteurs prétendent que dans certains cas l'EUT est au moins aussi valable et des fois mieux que RDU.

---

5. On dit qu'une fonction de répartition  $F$  domine une autre fonction de répartition  $G$  dans le sens de la dominance stochastique d'ordre un si  $\forall x \in XF(x) \leq G(x)$ .

La théorie de l'utilité dépendante des rangs est une théorie très intuitive et repose sur des bases mathématiques solides, cependant elle viole l'axiome de dominance stochastique d'ordre un. Par conséquent, elle ne vérifie pas les critères définis ci-dessus.

Dans notre cas et concernant la problématique de ce mémoire, nous estimons que les propriétés de dominance stochastique, indépendance et transitivité sont des propriétés essentielles pour notre modélisation du comportement des assurés, c'est la raison pour laquelle nous écartons les modèles RDU de notre liste de modèles candidats.

### 2.1.3.2 Modèles stochastiques de choix

Les modèles stochastiques de choix mettent au défi les théories conventionnelles du choix, de passer d'un cadre déterministe à un cadre probabiliste. En effet, le cadre probabiliste permet de contourner les limites de l'approche déterministe telles que les violations de sa construction axiomatique, les erreurs d'évaluation des agents et l'effet du contexte du choix. Nous présentons dans ce qui suit des exemples de modèles stochastiques de comportement de choix.

#### Modèles d'utilité forte (ou modèles de Fechner)

La représentation de Fechner fait partie des modèles à utilité stochastique. Fechner suppose que l'utilité de chaque agent est composée d'un terme déterministe auquel s'ajoute un bruit blanc. L'interprétation la plus courante de la composante bruit blanc est qu'elle capture tous les éléments déterminants de la décision définitive mais qui ne sont pas observables à l'économétricien ou à l'analyste.

Concrètement, suivant un modèle de Fechner, l'utilité qu'un agent dérive de la consommation d'un bien  $x$  s'écrit :

$$U(x) = u(x) + \epsilon_x \tag{2.2}$$

Où  $u(x)$  est une fonction à valeurs réelles (déterministe) et  $\epsilon_x$  est un bruit blanc, supposé être distribué identiquement (i.e. le bruit  $\epsilon_x$  dû à la consommation du bien  $x$  et  $\epsilon_y$  dû à la consommation du bien  $y$  sont indépendants et suivent la même distribution pour tous biens  $x$  et  $y$ ). Notons  $F$  la fonction de répartition de  $\epsilon_x - \epsilon_y$  pour tout couple d'alternatives  $(x, y)$ . Il est à noter que  $F$  ne dépend pas du choix du couple  $(x, y)$  vu que les bruits sont indépendants et identiquement distribués.

Cette représentation implique que, lorsque l'agent est confronté à un choix entre deux alternatives  $x$  et  $y$ , la probabilité qu'il choisisse  $x$  s'écrit :

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \mathbb{P}[u(x) + \epsilon_x \geq u(y) + \epsilon_y] \\ &= F(u(x) - u(y)) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ainsi, la probabilité de choisir une alternative plutôt qu'une autre est une fonction croissante de l'écart entre les utilités déterministes associées aux alternatives.

Bien que le résultat dans l'équation 2.3 soit simple et intuitif, l'axiomatisation de sa représentation (équation 2.2) révèle une fragilité. De manière générale, en théorie de la décision, les approches axiomatiques établissent des conditions précises qui doivent être vérifiables pour décider de l'applicabilité de l'approche. Dans le cas du modèle de Fechner, plusieurs exemples ont été identifiés qui remettent en cause sa validité.

En effet, Dagsvik (2008) [12] montre que la représentation 2.2 est équivalente à trois axiomes. Nous nous intéressons à l'axiome dit *Quadruple* qui stipule que si  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$  sont quatre alternatives telles que :  $P(x_1, x_2) > P(x_3, x_4)$ , alors  $P(x_1, x_3) > P(x_2, x_4)$ . Cette condition découle de l'équation 2.3 et reste difficile à justifier théoriquement et empiriquement : pourquoi la probabilité de choisir une alternative  $x_1$  au lieu de  $x_2$  aurait-elle une influence quelconque sur la probabilité d'effectuer un choix entre deux autres alternatives qui n'ont *à priori* aucun lien avec  $x_1$  et  $x_2$ ? Ceci est d'autant plus invraisemblable que le nombre d'alternatives dans l'univers de choix  $\mathcal{X}$  est grand.

Si par ailleurs l'univers de choix est l'ensemble de loteries (pour un ensemble d'alternatives  $\mathcal{C}$  donné), la représentation de Fechner est incompatible avec la dominance stochastique d'ordre un. En effet, on peut choisir quatre loteries ordonnées au sens de la dominance stochastique d'ordre 1 :  $L_1$  domine  $L_2$  qui domine  $L_3$  qui à son tour domine  $L_4$ , il est facile de construire une fonction d'utilité déterministe  $u$  de la représentation 2.2 telle que la condition quadruple ne soit pas satisfaite.

### Modèles d'utilité stricte (ou modèle de Luce)

Le modèle de Luce est un cas particulier d'un modèle de Fechner où les bruits  $\epsilon_x$  de la représentation 2.2 suivent une loi logistique. La représentation de Luce présente l'avantage d'être facile à manipuler mathématiquement et à généraliser au-delà du cadre de choix binaires. En effet, Luce suppose que les bruits sont des variables logistiques, l'équation 2.3 devient :

$$P(x, y) = \frac{e^{u(x)}}{e^{u(x)} + e^{u(y)}} \quad (2.4)$$

Qui se généralise pour le cas de choix multiples : si  $x$  est une alternative et  $S$  est un ensemble d'alternatives incluant  $x$ , alors la probabilité de choisir  $x$  parmi  $S$  s'écrit :

$$P(x, S) = \frac{e^{u(x)}}{\sum_{y \in S} e^{u(y)}} \quad (2.5)$$

La simplicité de ces expressions justifie en grande partie la popularité du modèle de Luce dans la littérature économique empirique. Par exemple, en organisation industrielle, pour l'es-



timation des parts de marché d'une marque donnée,  $P(x, S)$  sera interprétée comme étant la part de la marque  $x$  quand les marques  $S$  sont présentes dans le marché. Dans cet exemple précis, puisque les parts de marché sont observables, la formule de Luce rend facile l'estimation des déterminants de la fonction d'utilité déterministe dans l'équation précédente.

Néanmoins, en plus des désavantages du modèle de Fechner dont il est le cas particulier, le modèle de Luce est principalement critiqué pour l'hypothèse dite d'indépendance des alternatives non pertinentes (*Independence of irrelevant alternatives (IIA)*) qu'il suppose implicitement. En effet, si on considère deux ensembles d'alternatives  $S$  et  $D$  qui contiennent tous les deux les deux alternatives  $x$  et  $y$  (c'est-à-dire que  $x, y \in D \cap S$ ), alors l'équation 2.5 implique que :

$$\frac{P(x, S)}{P(y, S)} = \frac{P(x, D)}{P(y, D)}$$

Cette égalité est la définition même de la condition d'indépendance des alternatives non pertinentes : le ratio des probabilités de choisir  $x$  et  $y$  n'est pas influencé par les alternatives présentes dans l'ensemble duquel l'agent est appelé à choisir. En d'autres termes, toutes les alternatives autres que  $x$  et  $y$  et qui sont présentes dans l'ensemble  $S$  ne sont pas pertinentes pour la détermination de la fréquence du choix de  $x$  versus  $y$ .

Debreu a critiqué cette hypothèse à travers le problème des bus (*red-bus-blue-bus problem*). Pour illustrer, nous présentons une adaptation célèbre de l'exemple de Debreu. des navetteurs sont confrontés à une décision entre une voiture et un bus rouge. Supposons qu'un navetteur choisisse entre ces deux options avec une probabilité égale, 0.5, de sorte que le rapport de cotes soit égal à 1. Supposons maintenant qu'un troisième mode de transport, un bus bleu, soit ajouté. En supposant que les navetteurs de bus se soucient peu de la couleur du bus, ils doivent choisir entre bus et voiture avec une probabilité égale, de sorte que la probabilité de voiture est toujours de 0.5, tandis que la probabilité de chacun des deux types de bus est de 0.25. Mais IIA implique que ce n'est pas le cas : pour que le rapport de cotes entre voiture et bus rouge soit préservé, et que les probabilités de bus rouge et bleu soient égales (en d'autres termes, le navetteur est indifférent à la couleur), les nouvelles probabilités doit être 0.33 pour chacun des modes de transport. Le bus bleu est pertinent s'il est choisi, mais il doit être traité comme non pertinent s'il n'est pas choisi, ce qui diminue la probabilité globale de déplacement en voiture, ce qui n'a aucun sens pour un navetteur qui ne se soucie pas des couleurs. En termes intuitifs, le problème de l'axiome est qu'il est impossible de prendre en compte le fait que bus rouge et bus bleu sont très similaires et constituent des substituts parfaits. Tversky (1972) appelle ce phénomène l'effet de similarité .

L'axiome d'IIA, qui constitue la base du modèle de Luce, est violé systématiquement. De ce fait, nous écartons ce type de modèle pour la modélisation de notre problématique. En effet, nous estimons que la validité empirique du modèle est un critère important de sélection

d'un modèle adapté à notre problématique.

Dans cette partie, nous avons présenté quelques-uns des modèles les plus populaires en théorie de la décision. Nous avons ensuite discuté de leurs propriétés et de leurs limites. Nous concluons que, au vu de notre problématique, aucun de ces modèles classiques n'est adéquat. Dans le chapitre suivant, nous présentons un modèle qui convient mieux à notre contexte. Nous nous sommes basés sur les critères [10] présentés ci-dessus pour choisir ce modèle de choix binaire. Dans ce modèle, contrairement à d'autres modèles de décision, la dominance stochastique du premier ordre est satisfaite. Si une loterie domine stochastiquement une autre loterie, la dominante est choisie de façon déterministe, cependant, l'inverse est faux : une loterie peut être choisie de façon déterministe sans qu'elle ne soit dominante.

## 2.2 Le modèle de Blavatsky : un modèle de choix binaire probabiliste

### Un modèle de choix probabiliste

En réalité, les décideurs ne sélectionnent pas la même alternative quand ils sont confrontés à une situation de choix répétée. Ceci a fait l'objet de plusieurs études empiriques, notamment celle de Hey et Orme [13], qui ont utilisé plusieurs généralisations de la théorie de l'utilité espérée avec des données générées expérimentalement.

La théorie du choix probabiliste est introduite pour expliquer cette variabilité des préférences. Ce mécanisme permet également de capter plusieurs attributs du comportement humain. Dans un modèle de choix déterministe (comme le modèle de Von Neumann & Morgenstern vu précédemment), le point de départ est la relation d'ordre entre les loteries elles-mêmes. Ainsi, dans cette classe de modèles, nous supposons d'emblée qu'un agent préfère une loterie donnée à une autre. Par conséquent, à chaque fois que nous demandons à un agent de choisir entre deux loteries fixées, il agit systématiquement suivant sa relation de préférence et fait toujours le même choix (à moins qu'il soit indifférent entre les deux, auquel cas, il pourrait sélectionner aléatoirement). Dans un modèle à choix probabiliste, un agent n'est pas supposé avoir ni une relation de préférence, ni savoir ordonner toutes les loteries possibles. Il est simplement supposé choisir entre deux loteries suivant une probabilité donnée.

En d'autres termes, face au choix entre deux loteries  $A$  et  $B$ , l'agent peut choisir  $A$  avec une probabilité de 10%, c'est-à-dire  $A$  10% des fois et  $B$  90% des fois. Il est facile de voir qu'un modèle déterministe est un cas particulier de modèles probabilistes : il suffit de contraindre les agents à choisir avec une probabilité de 0% ou de 100 % dans un cadre probabiliste pour nous retrouver dans un cadre déterministe. En ce sens, les modèles probabilistes sont moins restrictifs que les modèles déterministes. Ceci dit, les deux classes n'ayant pas la même primitive (une préférence pour l'une, une règle de choix aléatoire pour l'autre), l'utilisation de modèles probabilistes requiert une nouvelle axiomatisation. Blavatsky [6] propose un ensemble d'axiomes que nous exposons par la suite.

### Un bon modèle de décision

L'article de Pavlo R. Blavatsky (2011) « A Model of Probabilistic Choice Satisfying First-Order Stochastic Dominance » [6] présente un modèle de choix binaire probabiliste dans un univers risqué. Dans ce modèle, un décideur satisfait toujours la dominance stochastique de premier ordre. Cette théorie est récente, elle a été publiée le 28 janvier 2011 dans la revue scientifique *Management science*. Le modèle proposé a un avantage comparatif sur des modèles existants similaires. L'auteur examine dans quelle mesure le modèle [6] s'ajuste aux données empiriques. Il utilise deux ensembles de données collectés par Hey et Orme (1994) et Hey (2001). Dans les deux ensembles, les individus effectuent des choix binaires et répétés sur

quatre résultats.

Dans la première expérience, Hey et Orme invitent 80 sujets à effectuer 100 choix binaires entre deux loteries sur un univers sous-jacent de choix  $\mathcal{C} = \{0, 10\mathcal{L}, 20\mathcal{L}, 30\mathcal{L}\}$ . En utilisant les réponses des sujets, Blavatskyy (2011) estime plusieurs modèles existants de choix probabiliste notamment le modèle de Fechner (à utilité forte) en plus du modèle de l'article. Ensuite, ces différents modèles sont comparés en termes de leur ajustement aux données en utilisant le test du ratio de vraisemblance de Vuong (1989). Le modèle proposé fournit un meilleur ajustement aux données expérimentales par rapport aux modèles existants. Ses schémas de choix prévus sont plus près des choix réels révélés.

De façon similaire, les données de Hey (2001) sont recueillies auprès de 53 sujets auxquels il est demandé d'effectuer 100 choix binaires entre loteries sur l'univers de choix  $\mathcal{C}' = \{-25\mathcal{L}, 25\mathcal{L}, 75\mathcal{L}, 3175\mathcal{L}\}$ . Une comparaison entre les quatre modèles est effectuée de nouveau sur les données de Hey (2001) et mène à la même conclusion. L'expérience de Hey (2001) a toutefois une particularité importante. Parmi les 100 choix binaires que chaque sujet est amené à effectuer, six sont parmi deux loteries ordonnées au sens de la dominance stochastique d'ordre un. L'expérience montre que les violations de la dominance stochastique d'ordre un sont assez rares empiriquement : 24 violations sur 1590 (soit 1.5% de violations). Ceci souligne l'importance de la dominance stochastique d'ordre un et explique l'intérêt que nous y portons pour la sélection de notre modèle dans ce mémoire.

Le modèle de base selon l'auteur n'est pas restreint à la décision dans un univers risqué et peut être étendu à d'autres domaines, tels que la modélisation du choix du consommateur des *commodity bundles* (panier de biens). Nous avons décidé de l'appliquer à la modélisation de la réponse des assurés à une incitation financière.

## 2.2.1 Formalisation du modèle

Pour présenter le modèle de Blavatskyy, nous introduisons les notations suivantes :

Soit  $\mathcal{X}$  un ensemble fini non vide de résultats totalement ordonné sous la relation de préférence  $\succsim$ . La loterie  $L : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$  est une distribution de probabilité sur  $\mathcal{X}$ . Ceci se traduit par  $L(x) \in [0, 1]$  pour tout  $x \in \mathcal{X}$  et  $\sum_{x \in \mathcal{X}} L(x) = 1$ . L'ensemble de toutes les loteries est noté  $\mathcal{L}$ .

Une loterie dégénérée qui engendre un résultat  $x \in \mathcal{X}$  avec une probabilité égale à 1 est notée par  $x$ . La notation  $L\alpha L'$  désigne une nouvelle loterie (à partir d'un mélange probabiliste) qui génère un résultat  $x \in \mathcal{X}$  avec une probabilité  $\alpha.L(x) + (1 - \alpha).L'(x)$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ .

Pour chaque paire de loteries  $L, L' \in \mathcal{L}$ , la loterie  $L \vee L'$  qui représente la plus petite limite supérieure (*least upper bound*), génère un résultat  $x \in \mathcal{X}$  avec une probabilité qui se présente comme suit :

$$L \vee L'(x) = \min \left\{ \sum_{\substack{y \in \mathcal{X} \\ x \succsim y}} L(y), \sum_{\substack{y \in \mathcal{X} \\ x \succsim y}} L'(y) \right\} - \min \left\{ \sum_{\substack{y \in \mathcal{X} \\ x \succ y}} L(y), \sum_{\substack{y \in \mathcal{X} \\ x \succ y}} L'(y) \right\}$$

et la loterie  $L \wedge L'$  représente la plus grande limite inférieure (*greatest lower bound*), génère un résultat  $x \in \mathcal{X}$  avec une probabilité comme suit :

$$L \wedge L'(x) = \max \left\{ \sum_{\substack{y \in \mathcal{X} \\ x \succsim y}} L(y), \sum_{\substack{y \in \mathcal{X} \\ x \succsim y}} L'(y) \right\} - \max \left\{ \sum_{\substack{y \in \mathcal{X} \\ x \succ y}} L(y), \sum_{\substack{y \in \mathcal{X} \\ x \succ y}} L'(y) \right\}$$

La loterie  $L \vee L'$  désigne la plus petite loterie (au sens de la dominance stochastique)<sup>6</sup> qui domine stochastiquement les deux loteries  $L$  et  $L'$ , c'est donc la plus petite borne supérieure sur les loteries  $L$  et  $L'$  en terme de dominance stochastique. Il n'existe donc pas de loterie qui puisse dominer stochastiquement  $L$  et  $L'$  et qui est dominée par  $L \vee L'$ .

De manière analogue, la loterie  $L \wedge L'$  désigne la plus grande loterie en terme de dominance stochastique telle que  $L \wedge L'$  est dominée par  $L$  et  $L'$ . La loterie  $L \wedge L'$  est stochastiquement dominée par  $L$  et  $L'$ , et il n'existe pas d'autre loterie qui soit dominée stochastiquement par  $L$  et  $L'$  et qui domine  $L \wedge L'$ .

Selon le modèle présenté par Blavatsky , un décideur choisit la loterie  $L$  par rapport à la loterie  $L'$ , tel que  $L \neq L'$ , avec une probabilité :

$$P(L, L') = \frac{\phi(U(L) - U(L \wedge L'))}{\phi(U(L) - U(L \wedge L')) + \phi(U(L') - U(L \wedge L'))} \quad (2.6)$$

Avec  $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$  étant l'espérance d'une fonction d'utilité (VNM) et  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction non décroissante avec  $\phi(0) = 0$ .

Ce modèle satisfait la dominance stochastique d'ordre un, selon (2.6) la probabilité  $P(L, L')$  est égale à 1 si  $L$  domine stochastiquement  $L'$  dans ce cas nous aurions  $L = L \vee L'$  et  $L' = L \wedge L'$ , ce modèle implique également que  $P(L, L') \geq 0.5$  si et seulement si  $U(L) \geq U(L')$ . Ainsi ce modèle, satisfait la dominance stochastique d'ordre un.

*Démonstration.*  $P(L, L') \geq 0.5$

$$\iff \phi(U(L) - U(L \wedge L')) \geq 0.5 (\phi(U(L) - U(L \wedge L')) + \phi(U(L') - U(L \wedge L')))$$

$$\iff \phi(U(L) - U(L \wedge L')) \geq \phi(U(L') - U(L \wedge L'))$$

$$\iff U(L) - U(L \wedge L') \geq U(L') - U(L \wedge L') \text{ (car } \phi \text{ est croissante.)}$$

$$\iff U(L) \geq U(L')$$

□

---

6. On dit qu'une fonction de répartition  $F$  domine une autre fonction de répartition  $G$  dans le sens de la dominance stochastique d'ordre un si  $\forall x \in X F(x) \leq G(x)$ .

## 2.2.2 Caractérisation axiomatique du modèle

La fonction de probabilité de choix binaire  $P : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]$  sert de point de départ du modèle. Pour chaque paire de loterie distinctes  $L$  et  $L' \in \mathcal{L}$ , tels que  $L \neq L'$ , la probabilité  $P(L, L')$  est observable à partir d'une fréquence relative avec laquelle le décideur choisit  $L$  quand il sagit de choisir de manière répétitive entre  $L$  et  $L'$ . Il est important de signaler que la probabilité  $P(L, L)$ , tel que  $L \in \mathcal{L}$  n'est ni observable ni définie.

Soit  $P : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]$  une fonction de choix qui satisfait les six axiomes suivants :

— **Axiome 1** La complétude

$$P(L, L') + P(L', L) = 1 \text{ pour chaque } L, L' \in \mathcal{L}, L \neq L'.$$

— **Axiome 2** La transitivité stochastique faible

Pour chaque  $L, L', L'' \in \mathcal{L}$   $L \neq L' \neq L''$  :

(a) Si  $P(L, L') \geq 0.5$  et  $P(L', L'') \geq 0.5$  alors  $P(L, L'') \geq 0.5$ ;

(b) Si  $P(L, L') = 1$  et  $P(L', L'') = 1$  alors  $P(L, L'') = 1$ .

— **Axiome 3** La continuité

Les ensembles  $\{\alpha \in [0, 1] \mid P(L, L' \alpha L'') \geq 0.5\}$  et  $\{\alpha \in [0, 1] \mid P(L, L' \alpha L'') \leq 0.5\}$  sont fermés pour  $L, L', L'' \in \mathcal{L}$  et un  $\alpha \in [0, 1]$ .

— **Axiome 4** L'indépendance des conséquences communes

$$P(L \alpha L'', L' \alpha L'') = P(L \alpha L''', L' \alpha L''') \text{ pour chaque } L, L', L'' \in \mathcal{L} \text{ et } \alpha \in [0, 1] \text{ tel que } L \neq L'$$

L'axiome 4 est la version faible de l'analogue probabiliste de l'axiome d'indépendance de la théorie de l'utilité espérée :  $P(L, L') = P(L \alpha L', L' \alpha L'')$  pour chaque  $L, L', L'' \in \mathcal{L}$  et  $\alpha \in [0, 1]$

— **Axiome 5** La monotonocité des conséquences

La probabilité  $P(x, x \alpha y) \in \{0, 1\}$  avec  $x, y \in \mathcal{X}$ ,  $x \neq y$  et quelque soit  $\alpha \in [0, 1]$ .

Cet axiome est la version faible de l'axiome d'internalité, qui stipule que chaque loterie est au moins aussi bonne que son pire résultat et au plus aussi bonne que son meilleur résultat.

— **Axiome 6** L'indépendance des *odds ratio* (rapport des cotes)

Pour chaque  $L, L', L'' \in \mathcal{L}$  tels que  $P(L', L) \neq 0$ ,  $P(L'', L) \neq 0$ ,  $P(L, L'') \neq 0$ , et  $L \wedge L' = L \wedge L''$ , l'*odds ratio* :  $\frac{P(L, L')}{P(L', L)} / \frac{P(L, L'')}{P(L'', L)}$  est indépendant de la loterie  $L$ .

Cet axiome est la version faible de l'axiome de choix de *Luce*.

Les axiomes 1, 2a et 3 sont des analogues probabilistes des axiomes correspondants dans la théorie de l'utilité espérée (VNM).

Blavastkyy dans [6] formalise le nouveau modèle de choix qu'il propose par le théorème suivant :

**Théorème 1 :** La fonction  $P : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]$  satisfait les axiomes de 1 à 6 si et seulement si il existe une fonction d'utilité monotone  $u : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  et une fonction non décroissante  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , avec  $\phi(0) = 0$ , tel que pour chaque  $L, L' \in \mathcal{L}$ ,  $L \neq L'$ , la probabilité  $P(L, L')$  est donnée par la formule 2.6.

$$P(L, L') = \frac{\phi(U(L) - U(L \wedge L'))}{\phi(U(L) - U(L \wedge L')) + \phi(U(L') - U(L \wedge L'))}$$

La fonction  $\phi$  capture la sensibilité des probabilités de choix binaires à des différences de l'utilité espérée.

La preuve du théorème est présentée en annexe du papier de Blavatskyy [6].

## 2.2.3 Application du modèle à notre problématique

### 2.2.3.1 Présentation des paramètres du modèle en assurance

Dans le cadre de ce mémoire nous ne considérons que le cas d'un portefeuille multisupports, en présence d'un actif non risqué (les fonds en euros) et d'un actif risqué (l'unité de compte). Soit  $\tau_A$  le taux servi attendu par les assurés. Soient,  $Ldim$ ,  $nsim$ , et  $Len$  des nombres entiers qui représentent respectivement l'effectif des assurés, le nombre de simulation et la taille de l'ensemble des poids des fonds en euros.

Considérons l'ensemble  $\mathcal{PM}$  qui contient la richesse, que nous confondons avec la provision mathématique, de chaque assuré,  $\mathcal{PM} = \{PM_1, PM_2, \dots, PM_{Ldim}\}$  et  $Z = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_{nsim}\}$  l'ensemble des rendements possibles de l'actif risqué (l'unité de compte). L'hypothèse selon laquelle la richesse serait égale à la provision mathématique est assez réaliste dans la mesure où les PM en plus des provisions pour participation aux bénéfices (PPB) représentent les encours en assurance vie.

L'ensemble des loteries possibles est un ensemble fini caractérisé par l'ensemble des poids  $\mathcal{W}_{euro}$  de taille  $Len$  défini comme suit :  $\mathcal{W}_{euro} = \{w_{euro_1}, w_{euro_2}, \dots, w_{euro_{Len}}\}$  l'ensemble des poids possibles des fonds en euros dans le portefeuille. Bien que, théoriquement on pourrait choisir n'importe quel poids entre 0 et 1, le modèle retenu est un modèle de choix multiples mais finis. Ceci reste réaliste : puisque les assurés raisonnent sur une maille finie de parts en UC.

On définit également  $\mathcal{W}_{uc} = \{w_{uc_1}, w_{uc_2}, \dots, w_{uc_{Len}}\}$  avec  $w_{euro} = 1 - w_{uc}$ ;  $\forall w_{euro} \in \mathcal{W}_{euro}$ .

L'ensemble  $\mathcal{X}$  représente l'ensemble des choix possibles. En d'autres termes, c'est la richesse encaissée par l'assuré. Les valeurs de  $\mathcal{X}$  dépendent du rendement aléatoire  $Z$  de l'UC, et de l'ensemble des poids  $\mathcal{W}_{euro}$ .

La variable  $nsim$  désigne le nombre de simulations des rendements  $Z$  de l'UC avec une loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ . Dans cette étude, nous travaillerons avec un nombre de simulations égal à 10000. Par la suite on suppose que  $\mathcal{W}_{euro}$  est un ensemble ordonné tel que :  $w_{euro_1} < w_{euro_2} < \dots < w_{euro_{Len}}$ . Par conséquent, une loterie est une fonction définie comme suit :

$$L : \begin{cases} \mathcal{X} \rightarrow [0, 1] \\ x \rightarrow L(x) \end{cases} \quad \text{telle que : } \sum_{x \in \mathcal{X}} L(x) = 1$$

Nous considérons  $\mathcal{U}$  comme une utilité espérée d'une fonction d'utilité  $u : x \rightarrow u(x)$ . Nous rappelons que dans le modèle de Blavatsky l'utilité utilisée est de type VNM, nous discuterons par la suite du choix de fonctions d'utilité. En finale, face à une loterie  $L$ , l'agent dérive une utilité espérée  $\mathcal{U}$  de :  $\mathbb{E}(u) = \mathcal{U}(L) = \sum_{x \in \mathcal{X}} L(x)u(x)$ .

Dans la suite de l'étude,  $L_{euro}$  est la loterie donnant les probabilités de chaque poids  $w_{euro}$ .

### 2.2.3.2 Des loteries aux fonctions de répartition en assurance-vie

Une loterie évaluée en  $x$ ,  $L(x)$ , exprime la probabilité que le résultat  $x \in \mathcal{X}$  soit réalisé. La fonction de répartition correspondante à  $L(x)$  donne la probabilité que le résultat réalisé soit inférieur ou égal à un résultat  $x$ . Ceci dit, pour chaque loterie  $L$ , on définit la fonction de répartition de la loterie  $L$  dénotée  $F_L$  comme suit :

$$F_L = \begin{cases} \mathcal{X} \rightarrow [0, 1] \\ x \rightarrow \sum_{y \leq x} L(y) \end{cases}$$

Dans la suite, nous définissons **les grandeurs principales du modèle de Blavatsky sous formes de définitions et propositions.**

#### **Dominance stochastique d'ordre un**

On dit qu'une fonction de répartition  $F$  domine une autre fonction de répartition  $G$  dans le sens de la dominance stochastique d'ordre un si  $\forall x \in \mathcal{X}, F(x) \leq G(x)$ .

#### **Définition de la loterie (*Least upper bound on distributions*)**

Pour toutes les fonctions de distribution  $F$  et  $G$ , on veut trouver  $F \vee G$ , la fonction qui domine  $F$  et  $G$  et qui soit la plus petite à les dominer.

#### **Proposition**

$\forall x \in \mathcal{X}, \forall F, G$  des fonctions de répartition :  $F \vee G(x) = \min(F(x), G(x))$ . Nous allons définir maintenant l'opérateur  $\vee$  pour des loteries.



### Définition de l'opérateur $\vee$ pour les loteries

Soient  $L, L'$  deux loteries sur  $\mathcal{X}$  et soient  $F_L$  et  $F_{L'}$ , les fonctions de répartition leur correspondant. La *least upper bound* de  $L$  et  $L'$ , notée aussi  $L \vee L' = L_{F_L \vee F_{L'}}$  est la loterie correspondante à la fonction de répartition  $F_L \vee F_{L'}$ . En d'autres termes :  $L \vee L' = L_{F_L \vee F_{L'}}$ .

La définition de Blavastkyy de  $L \vee L'$  grâce à la proposition suivante :

#### Proposition

$$\forall x \in \mathcal{X}, L \vee L'(x) = \min \left\{ \sum_{\substack{y \in \mathcal{X} \\ x \geq y}} L(y), \sum_{\substack{y \in \mathcal{X} \\ x \geq y}} L'(y) \right\} - \min \left\{ \sum_{\substack{y \in \mathcal{X} \\ x > y}} L(y), \sum_{\substack{y \in \mathcal{X} \\ x > y}} L'(y) \right\}$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} L \vee L'(x) &= L_{F_L \vee F_{L'}}(x) \\ &= F_L \vee F_{L'}(x) - F_L \vee F_{L'}(x^-) \\ &= \min(F_L(x), F_{L'}(x)) - \min(F_L(x^-), F_{L'}(x^-)) \end{aligned}$$

Nous avons  $F_L(x^-) = \sum_{\substack{y \in \mathcal{X} \\ x > y}} L(y)$  et  $F_{L'}(x^-) = \sum_{\substack{y \in \mathcal{X} \\ x > y}} L'(y)$ , (et comme rappel)  $F_L(x) = \sum_{\substack{y \in \mathcal{X} \\ x \geq y}} L(y)$  et  $F_{L'}(x) = \sum_{\substack{y \in \mathcal{X} \\ x \geq y}} L'(y)$  ce qui achève la preuve.  $\square$

Après avoir expliqué comment calculer les utilités espérées pour des loteries de type  $L_{euro}$  et comment obtenir la plus petite limite supérieure (la loterie *least upper bound*). Nous expliquons à présent comment calculer l'utilité espérée pour les loteries ce type.

Fixons un niveau de richesse  $PM \in \mathcal{PM}$ , pour des fins de simplicité nous considérons :

$\forall i \in 1, \dots, Len$ ;  $x_i = [w_{euro_i}(1 + \tau_A) + (1 - w_{euro_i})(1 + Z)] \times PM$  et fixons  $i_1, i_2 \in 1, \dots, Len$ , supposons que  $i_1 > i_2$  sans perte de généralité. L'objectif de cette partie est de trouver l'expression de  $\mathcal{U}(L_{w_{euro_{i_1}, PM}} \vee L_{w_{euro_{i_2}, PM}})$ .

Nous savons que :  $F_{w_{euro_{i_1}, PM}} \vee F_{w_{euro_{i_2}, PM}} = \min(F_{w_{euro_{i_1}, PM}}(x), F_{w_{euro_{i_2}, PM}}(x)) \forall x$ .

La question est donc de savoir pour quels  $x : F_{w_{euro_{i_1}}}(x) > F_{w_{euro_{i_2}}}(x)$ . Nous nous fixons un vecteur de poids  $\mathcal{W}_{euro} = \{0.01, 0.02, \dots, 0.99\}'$ ,  $0, 1 \notin \mathcal{W}_{euro}$  car nous nous intéressons uniquement aux multisupports. Ensuite, nous comparons chaque paire de poids  $(w_i, w_j) \in \mathcal{W}_{euro}$  pour construire la loterie  $L_{w_{euro_{i_1}, PM}} \vee L_{w_{euro_{i_2}, PM}}$ . L'utilité espérée est calculée par simulation des rendements UC ( $Z$ ) avec une loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$  de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  calibrés sur des supports UC du bancassureur.

#### Remarque

Nous définissons de manière similaire l'opérateur  $\wedge$  pour la plus grande limite inférieure (*greatest lower bound*), d'où la proposition suivante.

#### Proposition

$$\forall x \in \mathcal{X}, L \wedge L'(x) = \max \left\{ \sum_{\substack{y \in \mathcal{X} \\ x \geq y}} L(y), \sum_{\substack{y \in \mathcal{X} \\ x \geq y}} L'(y) \right\} - \max \left\{ \sum_{\substack{y \in \mathcal{X} \\ x > y}} L(y), \sum_{\substack{y \in \mathcal{X} \\ x > y}} L'(y) \right\}.$$

## 2.2.4 Extension d'un modèle binaire à un modèle à plusieurs alternatives

De nombreux modèles connus de la théorie de choix probabiliste tels que le modèle Fechner (1860) *Elements of Psychophysics*, sont développés pour des problématiques de choix binaires pour la simple raison que celles-ci sont fréquemment utilisées dans les recherches empiriques.

Cependant, de nombreuses applications de la théorie (la demande individuelle, recherche opérationnelle, choix social, économie politique, microéconomie de l'assurance, etc.) impliquent de multiples alternatives et nécessitent une extension des modèles de choix binaires. C'est le cas de la problématique de ce mémoire où le décideur est confronté à plusieurs alternatives.

Par exemple, compte tenu des données marketing sur la probabilité qu'un consommateur choisisse le produit  $A$  par rapport au produit  $B$ , le produit  $B$  par rapport au produit  $C$ , et le produit  $A$  par rapport au produit  $C$ , une entreprise pourrait être intéressée par connaître la probabilité que le produit  $A$  soit acheté lorsque les trois produits  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont proposés sur le marché.

Pour comparer entre plusieurs produits (loteries) en se basant sur des probabilités de choix binaire nous pouvons utiliser le procédé suivant :

1. Tirer un produit (loterie) au hasard qu'on note  $A$  ;
2. Tirer un autre produit (loterie) au hasard  $B$  puis calculer la probabilité binaire  $P(A, B)$ .  
Si le produit  $A$  est choisi contre  $B$  avec une probabilité  $P(A, B)$ , nous gardons  $A$  sinon c'est le produit  $B$  qui est choisi ;
3. Tirer sans remise un autre produit, jusqu'à avoir tout comparé.

Cette méthode nous permet de comparer tous les produits (loteries) deux à deux pour établir un ordre global. Cependant, le résultat est dépendant de l'ordre et il faudrait parcourir tous les ordres possibles. Dans la suite, nous présentons l'algorithme d'extension d'un modèle binaire à un modèle à plusieurs alternatives, qui permet de contourner cette difficulté.

Blavastkyy dans [5] présente un algorithme qui permet d'étendre tout modèle de choix binaire probabiliste à un modèle de choix parmi plus de deux alternatives.

### 2.2.4.1 Formalisation de l'algorithme

Soit  $S = \{A_1, \dots, A_n\}$  un ensemble fini de  $n \geq 2$  alternatives.

Soit  $P : S \times S \rightarrow [0, 1]$  une fonction de choix probabiliste binaire. La probabilité  $P(A_i, A_j)$  est la probabilité qu'un décideur choisisse l'alternative  $A_i \in S$  au lieu de l'alternative  $A_j \in S$  dans un contexte de choix binaire.

Pour chaque paire d'alternatives  $A_i, A_j \in S$  tels que  $A_i \neq A_j$ , la probabilité  $P(A_i, A_j)$  est observable à partir d'une fréquence relative où il est demandé au décideur de choisir de manière répétée entre  $A_i$  et  $A_j$ .

La probabilité  $P(A_i, A_i)$  n'est pas définie pour chaque  $A_i \in S$ .

Selon l'algorithme, un décideur agit selon la logique suivante :

1. Une alternative  $A_i \in S$  est sélectionnée aléatoirement. Cette alternative  $A_i$  sera labellisée comme la meilleure alternative, celle sera notée  $B$  (*best alternative*).
2. Une deuxième alternative  $A_j$  est sélectionnée aléatoirement  $A_j \in S$ , tel que  $A_j \neq B$ . Le décideur choisit entre  $A_j$  et  $B$ . Si  $A_j$  est choisie contre  $B$ , ceci se produit avec une probabilité  $P(A_j, B)$ , nous labellisons dans ce cas  $A_j$  comme la nouvelle alternative (*Best*)  $B$ .
3. L'étape deux est répétée à l'infini.

Nous résumons cet algorithme par le graphe suivant :

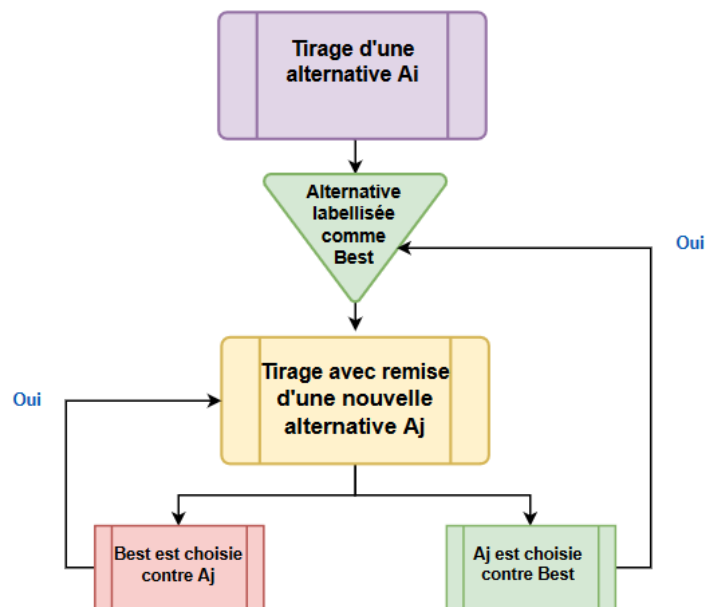


FIGURE 2.2 – Algorithme de choix du décideur

Pour chaque étape que nous noterons  $t > 2$  de cet algorithme, le décideur choisit l'alternative retenue dans la dernière comparaison et un autre élément tiré de l'ensemble  $S$ . Il est

important de signaler que chaque élément est tiré avec remise. Cela veut dire, que l'élément sélectionné peut être une des alternatives non-choisies dans les itérations précédentes.

Il est important de noter que nous ne supposons pas que l'agent effectue effectivement une chaîne infinie de choix binaires et qu'il dérive réellement une utilité à chaque maillon de la chaîne. Il s'agit uniquement d'un processus mental que l'agent suit en guise de raisonnement pour aboutir à un choix définitif. En d'autres termes, l'agent ne prend qu'une seule décision. Celle-ci consiste à choisir une alternative parmi les options qui lui sont offertes. Par conséquent, il dérive son utilité uniquement du choix final effectué.

#### 2.2.4.2 Fonctionnement de l'algorithme

Soit  $Q(A_i|S)_t$  la probabilité que la  $i$ -ème alternative  $A_i \in S$  soit choisie contre une alternative sélectionnée aléatoirement à l'itération  $t \in \mathbb{N}$  de cet algorithme. Autrement dit,  $Q(A_i|S)_t$  représente la probabilité que  $A_i$  soit choisie comme alternative *best*.

Les probabilités  $Q(A_i|S)_t$  sont définies récursivement par le système d'équations suivantes :

$$\begin{pmatrix} Q(A_1|S)_{t+1} \\ Q(A_2|S)_{t+1} \\ \dots \\ Q(A_n|S)_{t+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} \sum_{i \neq 1}^n P(A_1, A_i) & P(A_1, A_2) & \dots & P(A_1, A_n) \\ P(A_2, A_1) & \sum_{i \neq 2}^n P(A_2, A_i) & \dots & P(A_2, A_n) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ P(A_n, A_1) & P(A_n, A_2) & \dots & \sum_{i=1 \neq n}^n P(A_n, A_i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q(A_1|S)_t \\ Q(A_2|S)_t \\ \dots \\ Q(A_n|S)_t \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Avec la condition initiale  $Q(A_i|S)_1 = \frac{1}{n}$  pour chaque  $i \in \{1, \dots, n\}$  qui traduit l'étape 1 de l'algorithme, c'est-à-dire la sélection aléatoire d'une loterie.

Les termes diagonaux ainsi que le rapport  $\frac{1}{n-1}$  permettent de s'assurer que le vecteur obtenu par l'itération constitue bien un vecteur de probabilité. La probabilité qu'une alternative  $A_i$  soit choisie parmi un ensemble d'alternatives  $S$  est définie comme la limite des probabilités de choix des alternatives :  $Q(A_i|S) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} Q(A_i|S)_t$  pour chaque  $i \in \{1, \dots, n\}$ . En d'autres termes, nous calculons la chance que la  $i$ -ème alternative soit retenue parmi l'ensemble  $S$ , comme si l'individu continuait la séquence de choix binaires à l'infini. Le vecteur  $Q = (Q(A_1|S), \dots, Q(A_n|S))'$  est une distribution de probabilité asymptotique sur  $S$  si elle résout l'équation matricielle homogène suivante :

$$(P - (n-1)I).Q = 0 \quad (2.8)$$

Avec  $P$  une matrice de transition et  $I$  la matrice d'identité de dimension  $n \times n$ .

L'équation 2.8 est un système d'équations linéaires homogènes<sup>7</sup>. Elle a une solution triviale  $Q = 0$ , que nous pouvons écarter parce que toutes les probabilités de choix doivent sommer

---

7. c'est-à-dire que l'ensemble des solutions de ce système forme un sous-espace vectoriel.

à un. Cette équation a également une solution qui peut être présentée sous une forme fermée en utilisant la notation de la théorie des graphes.

### La théorie des graphes

En mathématiques, la théorie des graphes est l'étude des structures mathématiques, utilisées pour modéliser des relations par paire. C'est un moyen de représenter formellement un réseau, qui n'est autre qu'une collection d'objets interconnectés. Ainsi un graphe  $G$  est un ensemble de paires ordonnées  $G = (S, E)$  constitué de deux objets :  $S$  un ensemble de sommets (noeuds ou points) et  $E$  un ensemble d'arêtes qui relient les sommets, c'est la raison pour laquelle un élément de  $E$  est également appelé lien. Cette représentation est utile dans ce contexte, car l'extension du modèle de choix binaire n'est autre qu'un graphe constitué de paires ordonnées des alternatives de l'ensemble  $S$ .

Une arborescence  $G \equiv (S, E)$  est un graphe orienté (qui peut être parcouru dans un seul sens), c'est-à-dire une paire ordonnée de l'ensemble de sommets  $S$  et de l'ensemble des arêtes  $E$ , qui a un sommet  $R \in S$  appelé racine de  $G$ , tel que pour tout autre sommet  $\nu \in S$  il n'y a qu'un chemin unique dirigé de  $R$  vers  $\nu$ . Dans un graphe orienté, les arêtes sont munies d'un sens. Ainsi, les arêtes sont définies par leur origine et leur extrémité.

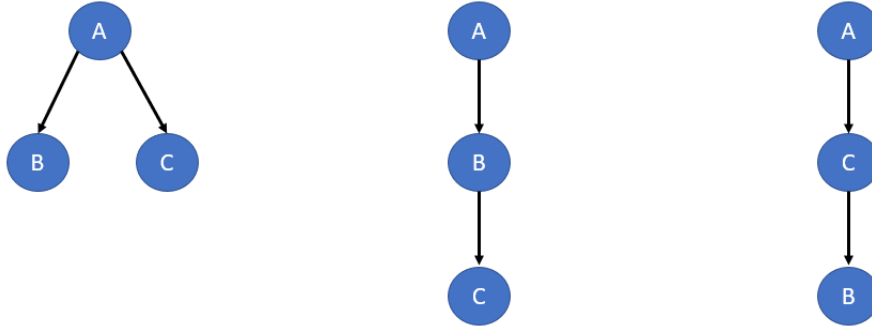
Soit  $G$  une arborescence de sommets  $S$  et  $\Gamma(S)$  l'ensemble de toutes les arborescences de sommets  $S$ . Soit  $R(G)$  la racine de  $G$  et  $E(G)$  l'ensemble des arêtes de  $G$ . Les éléments de  $E(G)$  sont des paires ordonnées des alternatives  $A_i, A_j$  telles que  $A_i, A_j \in S$  et  $A_i \neq A_j$ . Le produit  $\prod_{\{A_i, A_j\} \in E(G)} P(A_i, A_j)$  est la probabilité que le décideur choisit le sommet initial au sommet terminal  $A_j$  dans toutes les arêtes de l'arborescence  $G$ . En utilisant cette notation, le vecteur  $Q$  qui résout 2.8 s'écrit comme suit :

$$Q = \lambda \left( \sum_{G \in \Gamma(S) | R(G) = A_1} \prod_{\{A_i, A_j\} \in E(G)} P(A_i, A_j), \dots, \sum_{G \in \Gamma(S) | R(G) = A_n} \prod_{\{A_i, A_j\} \in E(G)} P(A_i, A_j) \right)' \quad (2.9)$$

Avec  $\lambda$  une constante arbitraire. Comme toutes les probabilités de choix doivent sommer à 1, ceci se traduit par la condition suivante :

$$\sum_{i=1}^n Q(A_i | S) = 1, \text{ ce qui implique que } \lambda = \frac{1}{\sum_{G \in \Gamma(S)} \prod_{\{A_i, A_j\} \in E(G)} P(A_i, A_j)}.$$

Dans la figure 2.3, nous présentons un exemple explicite de l'ensemble de graphes dont la racine est fixée (à un noeud  $A$  dans notre illustration). Nous considérons le cas simple d'arbres à 3 noeuds. Soit un ensemble  $S$  tel que  $S := \{A, B, C\}$ . Le résultat dépend de l'ordre, il faut donc parcourir tous les arbres possibles.



**FIGURE 2.3** – Exemple d'ensemble  $\{G \in \Gamma(S) | R(G) = A\}$  où  $S := \{A, B, C\}$ .

Ainsi, un décideur choisit une alternative  $A_k \in S$  à partir d'un ensemble de choix  $S$  différent d'un singleton avec la probabilité suivante :

$$Q(A_k | S) = \frac{\sum_{G \in \Gamma(S) | R(G) = A_k} \prod_{\{A_i, A_j\} \in E(G)} P(A_i, A_j)}{\sum_{G \in \Gamma(S)} \prod_{\{A_i, A_j\} \in E(G)} P(A_i, A_j)} \quad (2.10)$$

pour chaque  $k \in 1, \dots, n$ .

L'équation 2.10 permet de généraliser tout modèle de choix binaire à un modèle à alternatives multiples ( $n \geq 2$ ).

Cette généralisation a plusieurs propriétés intuitives. Par exemple si le décideur choisit toujours une alternative parmi chaque élément de l'ensemble des choix dans le cadre d'un choix binaire, alors il choisit toujours cette même alternative parmi l'ensemble des choix  $S$ . De façon réciproque, s'il ne choisit jamais une certaine alternative dans un cadre binaire, il ne la choisira jamais dans un cadre multi-alternatives.

Si le décideur choisit avec un vecteur de probabilités (50% , 50%) entre n'importe quelle paire d'alternatives d'un ensemble d'éléments de choix  $S$ , alors chaque alternative a une probabilité égale à  $\frac{1}{n}$  d'être retenue.

Plusieurs exemples exposés dans le papier [5] démontrent que l'algorithme proposé est assez général, dans la mesure où il peut être utilisé pour étendre des modèles très différents de choix binaire à des modèles de choix parmi alternatives multiples. Ainsi, nous pouvons utiliser cet algorithme pour étendre notre modèle de choix binaire probabiliste.

Il est important de préciser que bien que la forme explicite de  $Q$  définie dans 2.9 prouve l'existence de la limite, elle n'est pas utilisable en pratique car elle requiert un grand nombre d'opérations. En effet, le nombre d'arborescences pour  $n$  noeuds s'élève à  $n^{n-1}$ . C'est la raison pour laquelle nous utilisons les itérations dans la suite de l'étude. Il est important de noter que cet algorithme est également compatible avec plusieurs faits stylisés comme l'effet de domination asymétrique<sup>8</sup> (effet d'attraction) qui ne peuvent pas être expliqués dans les modèles standards. La théorie microéconomique néoclassique et le modèle de choix de *Luce* sont cohérents avec l'algorithme proposé. De manière générale, l'algorithme tient compte des spécificités de la théorie de la décision.

Dans cette partie, nous avons présenté le modèle de choix stochastique binaire de Blavatsky. Nous l'avons ensuite généralisé en un modèle de choix multiples. Nous avons montré que ce modèle vérifie certaines propriétés importantes telles que la dominance stochastique d'ordre un. Après la présentation théorique, nous avons appliqué ce modèle à notre problématique assurantielle. Nous relierons dans la partie suivante les différents éléments du modèle aux données empiriques dont nous disposons.

---

8. c'est le phénomène par lequel les consommateurs ont tendance à changer leurs préférences entre deux options lorsqu'on leur présente une troisième option étant asymétriquement dominée.

## 2.3 Calibrage de la décision des assurés

Après avoir explicité les principes et hypothèses de notre modélisation, ainsi que l'application du modèle retenu à notre problématique, nous présentons dans cette partie le calibrage des différents paramètres du modèle retenu.

### 2.3.1 Une base de données réelles volumineuse et fiable

La réalisation de ce mémoire s'est appuyée sur des bases de données dont dispose Mazars Actuariat. L'analyse s'est basée sur des données de passif par contrat issues d'un bancassureur vues au 31/12/2016.

#### 2.3.1.1 Présentation et traitement de la base de données

La base de données dont nous disposons concerne le périmètre épargne au 31/12/2016 avec une granularité permettant une étude par contrat. Elle contient les données suivantes :

- Type de produit : monosupport en euros, monosupport en UC ou multisupport
- Nom du produit
- Code du produit
- Code du contrat
- Date de signature du contrat
- Date origine du contrat
- Date de naissance de l'assuré
- Le taux minimum garanti (TMG) au 31/12/2016 net de frais de gestion pour chaque type de contrat
- Le capital minimum garanti,
- La part de la PM du fonds en euros au 31/12/2016
- La part de la PM du fonds en UC au 31/12/2016
- La PM totale au 31/12/2016
- Le taux servi moyen net de frais de gestion des contrats, y compris taux technique, TMG, ou autre taux garanti éventuel, et hors prélèvements sociaux au titre de l'année 2016 par produit.

Les PM seront notre indicateur de richesse des individus  $R$ . Nous n'avons pas besoin de définir un sens d'arbitrage. En effet, dans notre modèle les poids  $w_{euro}$  et  $w_{uc}$  varient entre 1% et 99%, et par conséquent les deux sens sont pris en considération.

L'analyse exploratoire des données a été menée sur le logiciel *open-source* R. Ces données ont déjà été utilisées dans le cadre d'une mission.

De plus, certaines données jugées aberrantes (soldes négatifs, PM totale différente de la somme de la part en euros et de la part en UC) ont été constatées et écartées sans que leur



volume ne remette en question le caractère exploitable de la base.

Les contrats monosupports en euros et en UC ont été exclus afin de cibler le portefeuille multisupport. Dans l’optique de cibler les contrats individuels, les personnes morales ont de plus été exclues de la base d’étude. La base étudiée (finale) est volumineuse, elle contient plus de 100 000 contrats au 31/12/2016.

Cependant, ces données peuvent être complétées par d’autres types de données qui pourraient enrichir le volume d’information disponible. Nous aurions souhaité avoir les données suivantes pour étayer nos conclusions :

- La proportion d’UC initiale : cette donnée permet de capter dans un premier temps l’appétence au risque du client. Elle constitue un bon indicateur de l’aversion au risque du client.
- Le rendement du contrat avant l’arbitrage.
- La composition du portefeuille.

Au vu du grand nombre de contrats, nous nous contenterons dans cette étude de présenter les résultats par produit. Nous disposons de 6 produits d’épargne que nous désignerons dans la suite de ce mémoire par : **produit 1 à 6**.

Par la suite, nous présentons quelques statistiques descriptives qui nous permettent de comprendre la composition de notre base de données. Il est important de signaler que, dans le cadre de cette étude, les assurés ont souscrit à un seul contrat. De plus pour des raisons de confidentialité, les valeurs des taux servis ont été retraitées et les niveaux de PM ont été censurés par produit, sans que ceci puisse affecter les résultats de notre étude.

### 2.3.1.2 Analyse de la typologie du passif

Nous présentons dans ce qui suit des statistiques résumant notre base de données. Cette étape est nécessaire car elle nous permet de caractériser la population des assurés de la base d’étude. Nous avons regroupé dans les tableaux suivants les principales caractéristiques des assurés présents dans le portefeuille.

<b>TMG moyen</b>	0.0317 %
<b>TMG moyen pondéré par les PM</b>	0.0698 %
<b>Taux servi moyen</b>	1.89 %
<b>Taux servi moyen pondéré par les PM</b>	1.93 %
<b>Part en UC moyenne</b>	33 %
<b>Part d’UC moyenne pondérée par les PM</b>	28 %
<b>Ancienneté moyenne (ans)</b>	7.25
<b>Age moyen (ans)</b>	53.3

**TABLE 2.2** – Caractéristiques des contrats

D'après le tableau 2.2, la part en UC moyenne de la base de données étudiée est de 33 % avec une ancienneté moyenne de 7 ans et 3 mois. La part d'UC moyenne est de 33 %, c'est-à-dire qu'en moyenne un assuré investit 33 % de sa PM totale en fonds en UC. La part d'UC moyenne pondérée par les PM totales est de 28 %.

Cette grandeur nous servira d'indicateur de la part en UC moyenne du portefeuille. Pour calibrer les paramètres de la fonction d'utilité  $u(\cdot)$  et de la fonction discriminante  $\phi(\cdot)$ , nous avons choisi d'utiliser dans la suite le TMG moyen pondéré et le taux servi moyen pondéré par les PM totales de chaque produit, au lieu du TMG moyen et du taux servi moyen, pour tenir compte de l'effet de richesse (PM) de chaque assuré.

Dans le tableau 2.3 ci-dessous nous présentons les caractéristiques moyennes par de contrats.

<b>Produit</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
<b>TMG moyen</b>	0	0	0	0	2.07 %	0
<b>Taux servi</b>	2.04 %	1.56 %	2.19 %	2.01 %	2.43 %	1.78 %
<b>Ecart relatif<sup>9</sup></b>	-28.4%	-3.5%	300%	441.3%	98.9%	-88%
<b>Part en UC moyenne</b>	34 %	31 %	32 %	31 %	39 %	35 %
<b>Ancienneté moyenne (ans)</b>	4.90	12.74	3.74	12.26	19.71	4.02
<b>Age moyen (ans)</b>	51.4	62.7	60	66.3	72.2	31

**TABLE 2.3** – Caractéristiques des contrats par produit

Au premier abord, nous remarquons que la part d'UC moyenne ne dépend pas de la PM moyenne. En effet, la part en UC moyenne ne dégage pas une relation de monotonie claire en fonction du niveau de la PM moyenne. La plus grande part en UC moyenne correspond au produit 5 qui, en termes de PM moyenne, est classé troisième. Quant à la plus petite part en UC moyenne, elle correspond au produit 4 qui est classé premier en termes de niveau de PM. De plus, si on exclut le produit 5, la fourchette de variation des part en UC moyenne est assez faible. Pour différents niveaux de la PM, la part en UC moyenne varie entre 30.6% et 34.5%.

Ceci peut être expliqué par l'aversion des assurés au risque. La richesse du client n'est pas le seul facteur qui détermine s'il va investir ou non dans le support risqué (UC). La proportion investie sur l'actif risqué (UC) n'est ni croissante ni décroissante en la richesse des assurés par produit et dépend de l'attitude de l'assuré face au risque. De plus, nous observons que l'ancienneté la plus élevée (produit 5) correspond au TMG moyen le plus élevé de 2.07 %. Dans un contexte de taux bas, les TMG proposés sont de plus en plus proches de 0 et peuvent même être négatifs s'ils sont nets de frais de gestion.

9. Pour des raisons de confidentialité, nous avons censuré les valeurs de la PM moyenne et nous ne présentons que l'écart relatif par rapport à la PM moyenne du portefeuille :  $\frac{PM_{produit} - PM_{moyenne}}{PM_{moyenne}}$

## Taux servi moyen par produit

Ce tableau présente également les taux servis moyens par produit. Ces taux correspondent aux taux servis moyens par l'assureur pendant l'année 2016. Le taux servi attendu  $\tau_A$  par l'assuré peut être déterminé en suivant un critère externe, par exemple en considérant que ce taux est une fonction des taux servis par la concurrence selon les anticipations économiques (taux *benchmark*). Il peut également être défini en fonction de critères internes liés à la compagnie d'assurance en considérant par exemple le taux servi l'année précédente ou l'image que l'assureur souhaite projeter.

La modélisation du taux attendu par les assurés comme une fonction du *taux benchmark*, que la compagnie estime cohérent avec ce que pourrait servir la concurrence, devrait être rapproché du taux représentant la concurrence dans la modélisation des rachats dynamiques. Par conséquent, ce taux est complexe à modéliser.

À enveloppe budgétaire constante, l'assuré devrait s'attendre à une dégradation du taux servi sans arbitrage du fait de la mise en place de la politique de survalorisation. Cependant, l'assuré ne connaît pas l'enveloppe de l'assureur. De plus, il ne dispose pas d'éléments pour anticiper la proportion des individus qui arbitreront effectivement et donc à quel point le taux sans bonus sera faible ou élevé. Pour ces raisons, nous faisons l'hypothèse que les assurés s'attendent au taux servi au titre de l'année 2016 pour l'année 2017.

Aussi, nous considérons que l'assureur alloue le même budget à la PB que l'année 2016 pour l'année 2017. Cette hypothèse est raisonnable dans la mesure où plusieurs modèles ALM effectuent un raisonnement similaire pour le calibrage des rachats dynamiques. Néanmoins, ceci est une simplification car dans un contexte de rendements dégradés, on peut s'attendre à une diminution des taux au fur et à mesure du passage du temps. La PB effectivement servie aux assurés (la dotation commerciale) est financée à partir des rendements de l'année et des réserves constituées lors des exercices précédents.

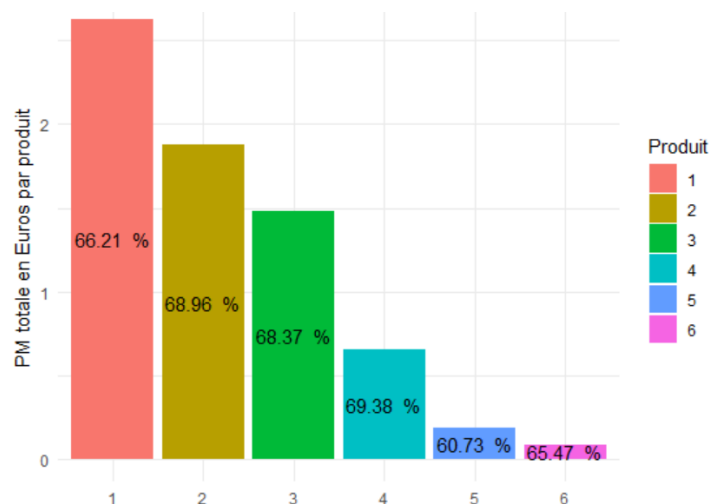
Les taux servis moyens à l'année 2016 multipliés par les PM en euros correspondantes constituent le budget de la PB à distribuer à l'année 2017. Nous allons déterminer par la suite les taux servis par l'assureur aux assurés à l'année 2017 tout en respectant l'enveloppe budgétaire de l'assureur.

La PM totale des produits multisupports est ventilée comme suit :

- 71.5% de la PM totale est investie sur des supports en euros ;
- 28.5% de la PM totale est investie sur des supports en unités de compte.

En termes de volume de PM, la PM totale en euros représente plus de deux fois le volume investi en fonds en UC.

La figure 2.4 présente la ventilation de la part de la PM totale en euros des contrats par produit. Nous avons censuré les valeurs des PM pour des raisons de confidentialité. Nous ne présentons que la PM totale en euros rapportée à la PM totale par produit. Cependant, la taille des bâtons donne un ordre de grandeur des PM par support et par produit. Par exemple, pour le produit 1, 66% de la PM totale est investie en fonds en euros.

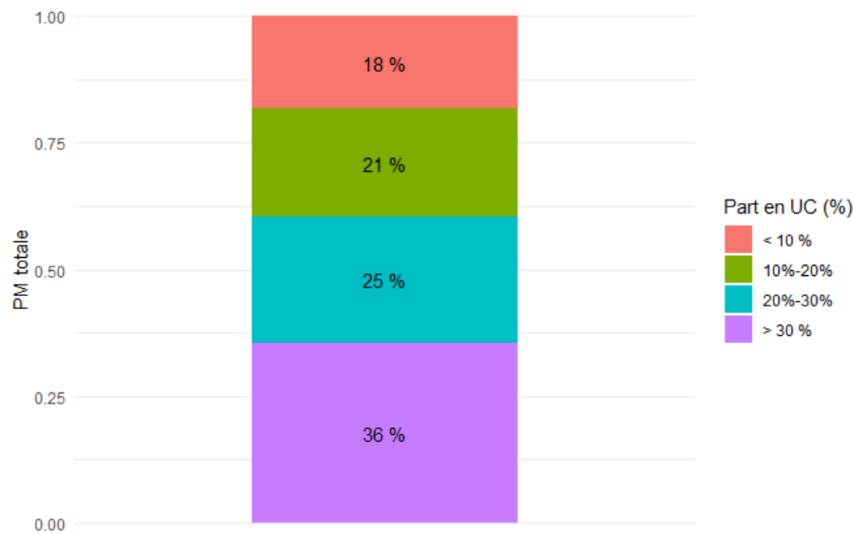


**FIGURE 2.4** – Ventilation de la PM totale en euros par produit

Nous observons que le niveau de la PM totale varie fortement par produit. Par exemple, le volume de la PM totale du produit 3 représente presque le double du niveau de la PM du produit 4. Ceci souligne la nécessité de pondérer les grandeurs utilisées pour le calibrage afin de tenir compte de l'effet de richesse.

Le volume de la PM par produit peut être un facteur déterminant de bonification. Considérons par exemple le cas où l'assureur souhaite maximiser le volume arbitré vers les fonds en UC, la solution d'incitation financière proposée par l'assureur privilégiera fortement une condition sur l'encours. Pour tenir compte du poids de chaque assuré, nous pondérons les grandeurs TMG par la PM totale, et le taux servi par la PM totale de chaque produit. Le taux servi moyen change par produit contrairement au TMG qui est défini contractuellement pour chaque contrat.

Nous présentons dans la figure 2.5 la PM totale par tranche de part en UC.



**FIGURE 2.5** – Ventilation de la PM totale par part en UC

Nous observons que la tranche de part en UC  $< 10\%$  représente 18 % de la PM totale, tandis que la tranche de part en UC  $> 30\%$  représente 36% de la PM totale. Cette ventilation de PM par tranche de part en UC nous permettra par la suite de définir des strates de seuils de variation pour distribuer des bonus différenciés selon le type de strates. Il en ressort également que 64% de la PM totale est investie dans des supports à moins de 30% d'UC. Ceci suggère qu'il y a un potentiel d'arbitrage vers les supports en UC.

### 2.3.2 Rendement et volatilité du fonds en UC

Dans le cadre de cette étude nous considérons que le rendement de l'UC,  $Z$ , suit une loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ . Les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  sont calibrés sur la base des rendements de supports des fonds en UC du bancassureur. Le but est de crédibiliser les paramètres utilisés pour répliquer les conditions réelles du marché. Le décideur les intègre dans son processus de prise de décision.

Sur un horizon de 5 ans (de 2012 à 2017), nous avons calculé les rendements annuels glissants des fonds que nous allons appeler  $A, B, C, D$  et  $E$ . Nous considérons que la moyenne et la volatilité des rendements annuels glissants correspondent au rendement et volatilité moyens de chaque fonds. Le tableau suivant présente les résultats obtenus :

Supports de fonds en UC	$\mu$	$\sigma$
Fonds A	3,05 %	9,06 %
Fonds B	1,82 %	6,17 %
Fonds C	0,92 %	3,55 %
Fonds D	4,79 %	11,29 %
Fonds E	0,76 %	10,77 %

**TABLE 2.4** – Le couple (rendement, volatilité) pour les supports de fonds en UC

Le fonds **A** correspond à un fonds plutôt dynamique contrairement aux fonds **B** et **C** qui sont respectivement des fonds équilibrés et modérés. En effet, l'allocation stratégique de long terme du fonds **A** est composé de 75% d'actions et 25% d'obligations, il a pour objectif d'obtenir sur la période de placement recommandée, une performance supérieure à celle d'un indice de référence. Ce fonds privilégie donc fortement les actions.

Quant au fonds **B**, il a pour objectif de gestion d'obtenir, sur la période de placement recommandée, une performance supérieure à celle de l'indice de référence composé de 50% taux et de 50% actions. Cette composition constitue son allocation stratégique de long terme.

Le fonds **C** dispose de la même allocation stratégique de long terme que le fonds **A**. Cependant, contrairement au fonds **A**, il privilégie fortement les taux.

Les fonds **D** et **E** correspondent à des rendements d'actions qui servent de support à la plupart des produits UC du bancassueur. Le fonds **D** a pour objectif de réaliser à long terme une performance supérieure à l'indice CAC 40 avec une durée de placement recommandée de 5 ans. L'objectif du fonds **E** est de surperformer l'indice MSCI Europe sur un horizon de placement de 5 ans minimum.

Les couples (rendement, volatilité) de ces fonds seront par la suite utilisés pour le calibrage de plusieurs paramètres de notre modèle.

## 2.3.3 Calibrage des paramètres du modèle de Blavatskyy

### 2.3.3.1 Les paramètres du modèle de Blavatskyy

#### La fonction discriminante du modèle de Blavatskyy

Dans le papier original [6], l'auteur propose deux formes de la fonction discriminante  $\phi$ ,  $\phi(x) = x^\lambda$  et  $\phi(x) = e^{\lambda x} - 1$ .

Pour toute paire de loteries  $X$  et  $Y$ , il est possible d'identifier la loterie *greatest lower bound*<sup>10</sup> des deux loteries. Pour chaque loterie, l'indicateur clé est la différence entre l'utilité espérée de la loterie et celle de  $X \wedge Y(x)$ . Notons ces différences  $X'$ <sup>11</sup> et  $Y'$ <sup>12</sup> respectivement et l'utilité espérée de  $X$  et  $Y$ ,  $EU(X)$  et  $EU(Y)$  respectivement. La probabilité que la loterie

10. La loterie *greatest lower bound* définie dans 2.2.3.2 est la loterie  $X \wedge Y(x)$ .

11.  $X' = EU(X) - EU(X \wedge Y)(x)$ .

12.  $Y' = EU(Y) - EU(X \wedge Y)(x)$ .

$X$  soit choisie au lieu de  $Y$  dans un choix binaire, s'exprime en fonction de  $\{X', Y'\}$ . Plus précisément, la probabilité que  $X$  soit choisie plutôt que  $Y$  est donnée comme suit selon la formule 2.6 :

$$P(X, Y) = P(X \succ Y) = \frac{\phi(X')}{\phi(X') + \phi(Y')}$$

Cette équation implique que si la condition  $\phi(X') = \phi(Y')$  est vérifiée, la probabilité de choisir chaque option est de 50%. La nature de la fonction  $\phi(\cdot)$  n'intervient pas. En effet, la correspondance entre la forme de la formule 2.6 donnée par Blavatsky et les axiomes ne contraint pas le choix de  $\phi$  tant que celle-ci vérifie les conditions :  $\phi(0) = 0$  et  $\phi(\cdot)$  non décroissante.

La fonction  $\phi(\cdot)$  peut être perçue comme une fonction qui permet de dilater la différence entre l'utilité espérée des loteries et le *greatest lower bound* (ou *least upper bound*). Le paramètre  $\lambda$  qui caractérise  $\phi(\cdot)$  s'interprète comme un paramètre de discrimination entre loteries, il dépend fortement de la population étudiée. Considérons l'exemple  $\phi(x) = x^\lambda$ , dans le cas où  $\lambda = 2$ , les différences entre les utilités espérées sont plus amplifiées par rapport au cas où  $\lambda = 1$ .

Par conséquent, la probabilité de choisir la loterie dont l'utilité espérée est fonction croissante de  $\lambda$ . Plus le paramètre  $\lambda$  augmente, plus il permet d'intensifier les écarts entre les utilités espérées. Si  $\lambda$  augmentait indéfiniment, la probabilité de choisir la loterie avec la plus grande utilité espérée atteindrait 1 (quand les espérances d'utilité des deux loteries sont différentes), ce qui revient au cas déterministe. Si on suppose  $X' > Y'$ , alors :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} P(X, Y) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{Y'}{X'}\right)^\lambda} = 1$$

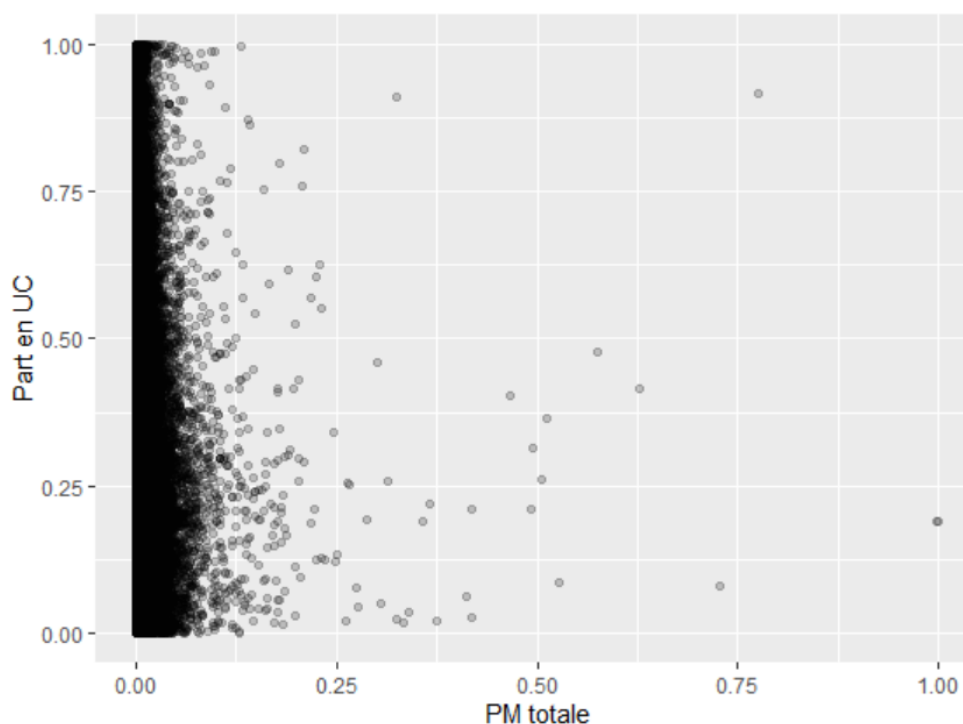
De même, si on suppose  $X' < Y'$ , alors :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} P(X, Y) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{Y'}{X'}\right)^\lambda} = 0$$

### Choix de la fonction d'utilité

Pour choisir la fonction d'utilité adéquate à notre portefeuille, nous regardons dans un premier temps la corrélation entre les  $PM$  et les parts en UC qui donnent une première idée sur l'aversion au risque des assurés.

Nous étudions à présent la corrélation entre les parts en UC et le niveau de richesse (PM). Le graphe suivant présente la distribution des parts en UC en fonction des PM totales.



**FIGURE 2.6** – Distribution des parts en UC en fonction des PM totales

Le nuage de points 2.6 représente la distribution des parts en UC en fonction des PM totales rapportées à leur valeur maximale. La valeur des PM totales a été normalisée pour des raisons de confidentialité. Le graphique 2.6 ne fait pas apparaître une relation claire de croissance ou décroissance entre les niveaux de PM et les parts en UC. Nous allons vérifier cette absence de corrélation par des tests statistiques.

Par la suite, nous utilisons des tests de corrélation pour évaluer la dépendance entre les deux variables. Plusieurs tests statistiques existent notamment les tests de corrélation de *Spearman*, de *Pearson* et de *Kendall*.

Le coefficient de corrélation de *Pearson* permet d’analyser les relations linéaires et le coefficient de corrélation de *Spearman* les relations non linéaires monotones. Lorsque la tendance est affine, il se comporte de façon similaire au coefficient de *Pearson*.

Le coefficient de *Pearson* caractérise la liaison linéaire, lorsque celle-ci ne l’est pas ceci peut nous induire en erreur sur l’existence et l’intensité de la relation entre les deux variables. Le coefficient de *Spearman* ne tient pas compte des ex-aequo et ne permet pas de calculer la *p-value* exacte. Dans notre cas, le nombre de valeurs identiques est élevée et une correction du coefficient de *Spearman* par le rang moyen n’est pas envisageable. De ce fait, nous écartons ces deux tests.

Le coefficient de *Kendall* permet de mesurer l’association entre deux variables. Plus spécifiquement, il mesure la corrélation de rangs entre deux variables. Il s’interprète différemment des deux tests présentés ci-dessus, il s’interprète comme le degré de correspondance entre deux classements. Il est plus robuste que les tests de *Pearson* et *Spearman*.



Méthode	<i>Pearson</i>	<i>Kendall</i>
<b>Hypothèse H0</b>	$r = 0$	$r = 0$
<b>Probabilité critique <i>p-value</i></b>	0	0
<b>Coefficient de corrélation (<b>r</b>)</b>	-0.085	-0.139
<b>Intervalle de confiance à 95 %</b>	[-0.09 ; -0.08]	[-0.142 ; -0.135]

**TABLE 2.5** – Tests de corrélation

D'après le tableau 2.5, la probabilité critique *p-value* des trois tests de corrélation est nulle. Cependant, l'intervalle de confiance est très faible et malgré le fait que le coefficient de corrélation soit statistiquement non nul, il est très faible.

Sur cette base, nous sélectionnons la fonction d'utilité CRRA pour laquelle le choix de la part en UC par un agent est dissocié de sa richesse. Cela implique que la prise de décision n'est pas affectée par l'échelle et par conséquent le calibrage des paramètres ne dépend pas du niveau de la PM.

Pour la fonction discriminante, nous choisissons de travailler avec les fonctions proposées par l'auteur et plus particulièrement nous retenons la fonction  $\phi(x) = x^\lambda$ . Le paramètre  $\lambda$  est une constante que nous calibrons à partir du portefeuille d'assurés dont nous disposons. Le choix de la fonction discriminante  $\phi(x) = x^\lambda$  est dû à l'interprétabilité plus aisée de ce paramètre par rapport à la fonction  $\phi(x) = e^{\lambda x} - 1$ .

Du fait du choix de la fonction de type CRRA comme fonction d'utilité des assurés et  $\phi(x) = x^\lambda$ , la valeur de la PM n'intervient pas dans le calibrage. Nous pouvons donc effectuer un calibrage au niveau de tout le portefeuille.

En effet, posons  $y := w_{euro}(1 + \tau) + (1 - w_{euro})(1 + Z)$ , où  $Z$  est le rendement (aléatoire) du fonds en UC. Suivant les notations du chapitre 3, on note  $F_L$  la fonction de répartition correspondant à la loterie  $L$ . Avec les choix :  $\phi(x) = x^\lambda$  et  $u(x) = \frac{x^{1-\rho}}{1-\rho}$  et la notation  $U(L) = \mathbb{E}_L(PMy)$ , i.e  $U$  est l'espérance d'utilité, où  $y$  est considéré comme étant une variable aléatoire suivant la loi (loterie)  $L$ , on obtient en injectant ces grandeurs dans la formule 2.6 le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
P(L, L') &= \frac{\phi(U(L) - U(L \wedge L'))}{\phi(U(L) - U(L \wedge L')) + \phi(U(L \wedge L') - U(L'))} \\
&= \frac{\phi(\mathbb{E}_L(u(PMy)) - \mathbb{E}_{L \wedge L'}(u(PMy)))}{\phi(\mathbb{E}_L(u(PMy)) - \mathbb{E}_{L \wedge L'}(u(PMy))) + \phi(\mathbb{E}_{L \wedge L'}(u(PMy)) - \mathbb{E}_{L'}(u(PMy)))} \\
&= \frac{[\int (PMy)^{1-\rho} dF_L(y) - \int (PMy)^{1-\rho} dF_{L \wedge L'}(y)]^\lambda}{[\int (PMy)^{1-\rho} dF_L(y) - \int (PMy)^{1-\rho} dF_{L \wedge L'}(y)]^\lambda + [\int (PMy)^{1-\rho} dF_{L \wedge L'}(y) - \int (PMy)^{1-\rho} dF_{L'}(y)]^\lambda} \\
&= \frac{[\int y^{1-\rho} dF_L(y) - \int y^{1-\rho} dF_{L \wedge L'}(y)]^\lambda}{[\int y^{1-\rho} dF_L(y) - \int y^{1-\rho} dF_{L \wedge L'}(y)]^\lambda + [\int y^{1-\rho} dF_{L \wedge L'}(y) - \int y^{1-\rho} dF_{L'}(y)]^\lambda}
\end{aligned}$$

Où la dernière égalité est obtenue en simplifiant par  $PM^{(1-\rho)\lambda}$ . On voit qu'avec ce choix de fonctions ( $\phi$  et  $u$ ), la probabilité de choisir  $L$ , parmi  $L$  et  $L'$  ne dépend pas de la richesse

de l'agent étudié.

### 2.3.3.2 Calibrage du modèle de Blavatskyy

#### Choix de la méthode d'optimisation

Nous utilisons le package `optim` de R pour choisir nos paramètres optimaux. Les méthodes `Nelder-Mead` et `L-BFGS-B` ont été utilisés.

- La méthode `Nelder-Mead` (NM) :

L'algorithme de `Nelder-Mead` est une méthode numérique, publiée en 1965 par Nelder et Mead, couramment utilisée pour trouver le minimum ou le maximum d'une fonction objectif dans un espace multidimensionnel. C'est une méthode de recherche directe<sup>13</sup> (basée sur la comparaison de fonctions) qui est souvent appliquée aux problèmes d'optimisation multidimensionnelle, sans contrainte et non linéaire pour lesquels les dérivées peuvent ne pas être connues.

En effet, cette méthode consiste en la génération de directions qui permettent d'explorer l'espace de recherche. Cependant, la technique de `Nelder-Mead` est une méthode de recherche heuristique<sup>14</sup> qui peut converger vers des points non stationnaires sur des problèmes pouvant être résolus par des méthodes alternatives. La méthode se base sur une optimisation sans gradient, elle ne nécessite aucune information sur les dérivées, ce qui la rend adaptée aux problèmes liés aux fonctions non lisses.

#### Avantages & Inconvénients

Dans de nombreux problèmes pratiques, tels que l'estimation ou la calibration de paramètres, les valeurs des fonctions sont incertaines ou sujettes au bruit. Par conséquent, une solution très précise n'est pas nécessaire et peut être impossible à calculer. Tout ce que l'on souhaite, c'est une amélioration de la valeur de la fonction plutôt qu'une optimisation complète.

Cette méthode a donc le mérite d'être générale et efficace puisqu'elle s'applique à une fonction continue sans évaluer ses dérivées. En plus, elle fournit une série décroissante de valeurs de la fonction objectif. Toutefois, elle s'applique difficilement lorsque le minimum recherché se situe au voisinage de la frontière.

Elle nécessite également un simplexe de départ (arbitraire) qui peut ralentir l'algorithme si mal choisi. Une dégradation de performance peut être également constatée

---

13. Une méthode de recherche directe est une méthode qui ne suppose aucune condition sur la fonction objectif ou des contraintes comme la convexité, la différentiabilité etc. Les dérivées sont considérées comme inconnues (inestimables) et seules les valeurs de la fonction objectif sont utilisées pour mener l'optimisation.

14. Il s'agit d'une approche pour trouver une solution satisfaisante, pas nécessairement parfaite, pour un problème d'optimisation complexe. Elle est utilisée généralement en théorie des graphes, en optimisation combinatoire, intelligence artificielle etc.

lorsque la dimension du problème d'optimisation augmente. Et finalement, il se peut que les simplexes obtenus successivement dégénèrent.

Dans notre étude, nous ne disposons pas d'information sur la convexité ou la différentiabilité de la fonction étant donné que ces grandeurs dépendent des paramètres  $\lambda$  et  $\rho$ , cette méthode nous permet d'avoir une solution à notre problème d'optimisation.

- La méthode L-BFGS-B (LBB) :

La méthode de L-BFGS-B (ou BFGS à mémoire limitée) se rapproche de l'algorithme de *Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno* (BFGS) sauf qu'elle utilise une quantité limitée de mémoire informatique. C'est un algorithme populaire pour l'estimation de paramètres en *machine learning*.

La méthode BFGS fait partie des méthodes *Quasi-Newton*, une classe de techniques d'optimisation qui recherchent un point stationnaire d'une fonction (de préférence deux fois continuellement différentiable). Pour de tels problèmes, une condition nécessaire à l'optimalité est que le gradient soit égal à zéro.

Contrairement à BFGS qui garde en mémoire l'historique complet de l'approximation  $n \times n$  de l'inverse de la hessienne ( $n$  étant le nombre de variables du problème), L-BFGS-B ne garde en mémoire que les vecteurs les plus récents généralement de dimension  $m$  ( $m < 10$ ). En raison de ses besoins limités en mémoire, la méthode L-BFGS-B est particulièrement adaptée aux problèmes d'optimisation à variables multiples.

### Avantages & Inconvénients

L'avantage de L-BFGS-B est de ne conserver que les  $m$  gradients les plus récents, ce qui représente un besoin de stockage beaucoup plus petit que  $n \times (n+1)/2$  éléments nécessaires au stockage complet avec  $n$  la dimension du problème. De plus, cette méthode permet d'incorporer des contraintes pour tous ou une partie des paramètres.

Toutefois, les méthodes de la classe *Quasi-Newton*, sont en général utilisées quand les méthodes intégrales de *Newton* prennent trop de temps ou sont difficiles à utiliser. Le manque de précision du calcul hessien conduit à une convergence plus lente en nombre de pas. De ce fait, les méthodes *Quasi-Newton* peuvent être plus lentes et donc moins performantes par rapport à l'utilisation de la méthode de *Newton* complète.

Cela se produit pour des problèmes simples où le temps de calcul supplémentaire nécessaire pour calculer l'inverse de la hessienne est faible. Dans ce cas, la méthode de *Newton* complète est de toute façon meilleure. Un inconvénient supplémentaire des méthodes *Quasi-Newton* est la mémoire de stockage nécessaire pour l'inverse de la hessienne, nous pouvons remédier à cela grâce à la mémoire limitée de L-BFGS-B.

Dans notre étude, nous calibrons ces paramètres sur une base de données volumineuse

et donc le temps de calcul est un facteur déterminant. Les méthodes *Quasi-Newton* sont un moyen efficace d'optimiser les fonctions lorsque le calcul est coûteux. Bien que leurs méthodes exactes varient, ils peuvent tous déterminer l'optimum plus rapidement et plus efficacement que la méthode de *Newton* lorsque les problèmes sont complexes.

Dans notre étude, nous utilisons dans un premier temps les deux méthodes pour sélectionner la méthode la plus adaptée à notre problème en fonction du facteur de temps. Le but est d'optimiser à la fin une fonction objectif à variables multiples. La méthode sélectionnée est la méthode *L-BFGS-B*. Nous ne présentons par la suite que les résultats obtenus en utilisant *L-BFGS-B*.

### 2.3.3.3 Paramètres du calibrage

La fonction objectif utilisée est composée de plusieurs paramètres que nous fixons. Le tableau 2.6 résume les différents paramètres dont dépend la fonction objectif que nous choisissons pour calibrer les paramètres  $\lambda$  et  $\rho$ .

Type de paramètre	Valeur du paramètre
Type du fonds	A
$\mu$	3,05 %
$\sigma$	9,06 %
Provision mathématique	1
Taux servi	1,93 %
TMG	0.0698 %
Nombre de simulation ( <i>nsim</i> )	10000
Nombre d'itérations ( <i>Niter</i> )	50

TABLE 2.6 – Paramètres fixés de la fonction objectif

Nous faisons l'hypothèse que le rendement de l'UC,  $Z$ , suit une loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ . Pour définir un couple  $(\mu, \sigma)$ , il faut choisir un type de fonds. Et pour calculer l'utilité espérée, il est nécessaire de se fixer un nombre de simulations des trajectoires du rendement de l'UC. Nous choisissons de travailler avec  $nsim = 10000$ . Le taux servi avec lequel nous travaillons est le taux auquel s'attendent les assurés, ce n'est donc pas le taux réel servi au titulaire du contrat pour l'année en question. Nous cherchons justement à déterminer cette grandeur de manière à respecter les contraintes budgétaires de l'assureur.

Nous considérons que l'assureur alloue le même budget à distribuer de la PM que l'année  $n - 1$ . Cependant, le taux servi attendu n'est pas fixe pour tout le portefeuille des assurés et dépend du type de produit d'épargne. Il est donc nécessaire de calibrer les paramètres  $\lambda$  et  $\rho$  qui sont communs à tous les assurés avec un taux de PB moyen.

Nous avons choisi de travailler avec le taux servi moyen pondéré par les PM totales de chaque produit, pour tenir compte de l'effet de la richesse de chaque produit. De manière

similaire, le TMG est propre à chaque contrat, nous avons donc travaillé avec le TMG moyen pondéré par les PM totales de chaque individu.

Le nombre d'itérations  $Niter$  intervient dans le calcul récursif de la matrice  $Q$  explicité dans la section 2.2.4.2. En effet, nous avons effectué certains tests et nous estimons que  $Niter = 50$  est une valeur de paramètre assez large pour assurer la convergence de l'algorithme de l'extension du choix binaire à un choix à plusieurs alternatives. En utilisant les paramètres fixes du calibrage présentés dans le tableau 2.6, nous calculons la distribution  $Q$  pour différentes valeurs de  $Niter$  allant de 1 à 100. Pour des raisons de visibilité, nous présentons les distributions  $Q$  de quelques poids uniquement en fonction du nombre d'itérations.

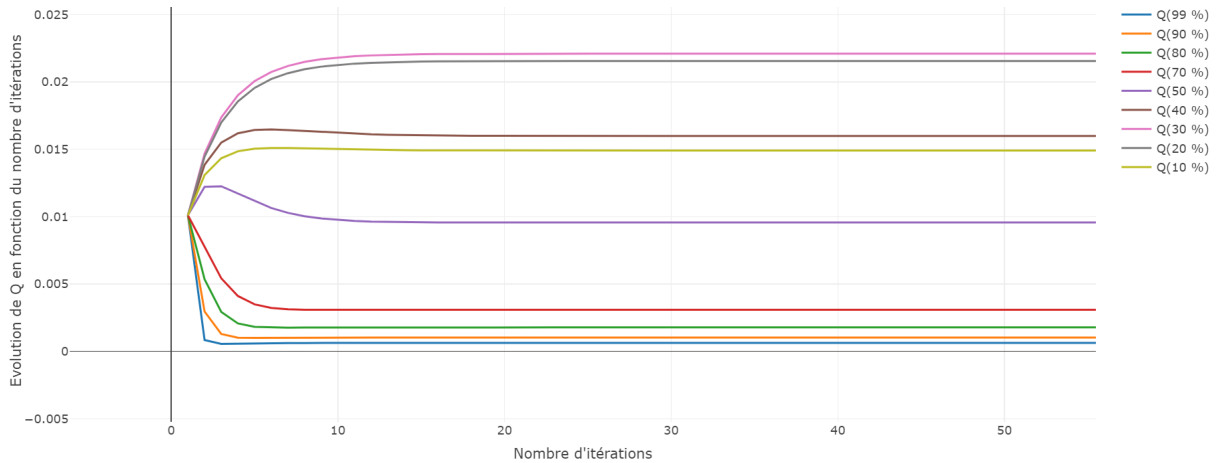


FIGURE 2.7 – Évolution de  $Q$  en fonction du nombre d'itérations

À travers la figure 2.7, nous remarquons que les valeurs de  $Q$  sont stables pour  $Niter = 50$ . C'est la raison pour laquelle nous avons choisi de continuer l'étude avec  $Niter = 50$ . Cependant, il est possible de choisir d'autres critères d'arrêt de l'algorithme comme par exemple une tolérance entre  $Q(A_i|S)_n$  à l'étape  $n$  et  $Q(A_i|S)_{(n+1)}$  à l'étape  $n + 1$ .

### 2.3.3.4 Calibrage des fonctions d'utilités

Le calibrage des fonctions d'utilité revient à calibrer le paramètre d'aversion au risque  $\rho$ . Dans un premier temps, nous effectuons une optimisation unidimensionnelle en fixant le paramètre  $\lambda$ , nous attribuons à  $\lambda$  des valeurs allant de 1 à 10. La fonction objectif choisie est l'écart quadratique entre la fonction de répartition théorique du modèle  $F_L$  et la fonction de répartition empirique  $F_{euro}$ . Le problème d'optimisation unidimensionnelle s'écrit :

$$\tilde{\rho} = \underset{\rho}{\operatorname{argmin}} \sum_{x \in \mathcal{X}} (F_L(x, \rho) - F_{euro}(x))^2$$

La fonction objectif mesure l'écart entre les observations et les prédictions du modèle théorique. Elle peut prendre plusieurs formes comme par exemple la valeur absolue de la différence

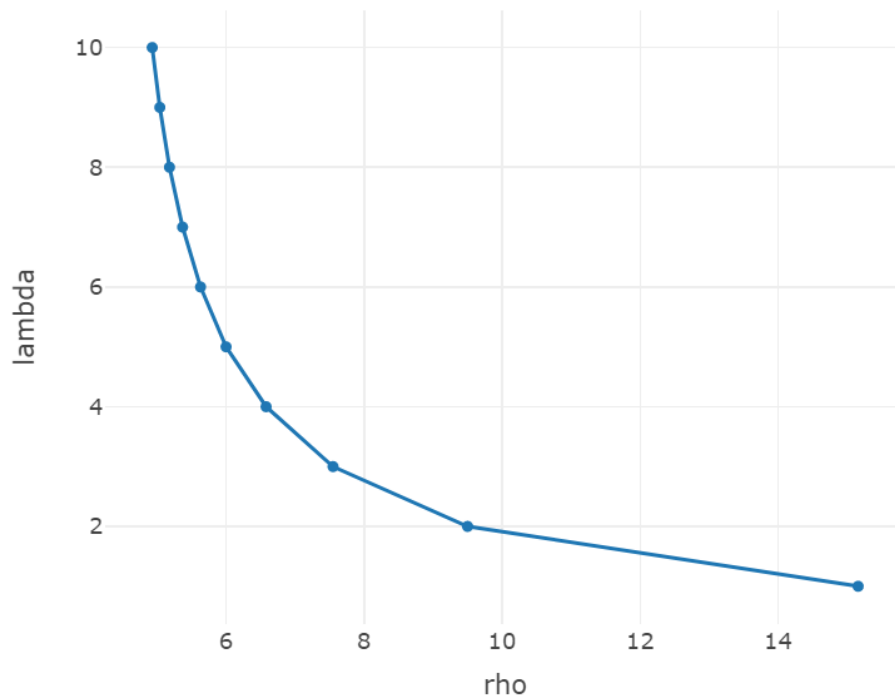
entre les observations et les prédictions du modèle. L'objectif est de garantir la représentation de l'allocation des fonds en UC et des fonds en euros du portefeuille.

$\lambda$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>Fonction objectif</b>	0.23	0.18	0.14	0.13	0.12	0.13	0.15	0.17	0.21	0.25
<b><math>\rho</math> optimal</b>	15.16	9.5	7.55	6.58	6	5.63	5.37	5.18	5.04	4.93

**TABLE 2.7** – Résultats de l'optimisation unidimensionnelle (L-BFGS-B) de  $\rho$  pour le fonds A

D'après le tableau 2.7, nous remarquons que le paramètre  $\rho$  dépend fortement de la valeur du paramètre  $\lambda$ . En effet, pour une valeur de  $\lambda = 1$  le paramètre  $\rho$  vaut 15.16, alors que pour une valeur de  $\lambda = 10$  le paramètre  $\rho$  est de 4.93. Il existe donc une forme de compensation entre les deux paramètres, plus la valeur du paramètre  $\lambda$  augmente, plus la valeur du paramètre  $\rho$  diminue. Pour observer cet effet, nous avons tracé dans la figure 2.8, l'évolution de la valeur optimale de  $\rho$  en fonction du paramètre  $\lambda$ .

Les paramètres  $\lambda$  et  $\rho$  sont interdépendants et ne peuvent pas être calibrés séparément. Ils produisent tout les deux des effets similaires sur la probabilité  $P(L, L')$  quelque soient les loteries  $L$  et  $L'$ . Puisque, empiriquement, nous observons des estimations de la probabilité  $P(L, L')$ , toute estimation des paramètres  $\lambda$  et  $\rho$  ne peut se faire que sur la base de ces observations. Il n'est par conséquent pas possible d'identifier ces deux paramètres en se basant sur des données uniquement.



**FIGURE 2.8** – Évolution de la valeur optimale de  $\rho$  en fonction de  $\lambda$

La figure 2.8 suggère une relation décroissante entre les deux paramètres. Nous rappelons que le paramètre  $\rho$  représente l'aversion au risque et le paramètre  $\lambda$  caractérise la fonction discriminante  $\phi(\cdot)$ . Plus  $\lambda$  est grand, plus la différence entre les utilités des loteries  $L$  et  $L \vee L'$ <sup>15</sup> est significative. Ceci peut être interprétée de la manière suivante : si les individus sont averses risques (et donc  $\rho$  est élevé), le paramètre  $\lambda$  n'intervient pas fortement dans la prise de décision. En d'autres termes, le paramètre  $\lambda$  peut être perçu comme une caractérisation de l'intensité de l'écart des utilités entre les deux objets  $L$  et  $L \vee L'$ .

Imaginons que nous disposons de deux loteries, une plus risquée que l'autre. Augmenter l'aversion au risque (avec un niveau de discrimination entre deux loteries  $\lambda$  constant) accentue la préférence du consommateur pour la loterie la moins risquée. Supposons qu'à l'inverse, le niveau d'aversion au risque soit fixé. Le paramètre  $\lambda$  amplifie la différence entre les utilités dérivées des deux loteries. Ainsi, augmenter  $\lambda$  produit un effet similaire à celui dû à une augmentation de  $\rho$ .

### Sensibilité de $\rho$ au choix du type de fonds

Dans la suite, nous cherchons à détecter l'effet du choix du type de fonds. Nous avons donc mené des optimisations unidimensionnelles pour chacun des cinq fonds sélectionnés en

15. Nous rappelons que  $L \vee L'$  est la *least upper bound* du modèle de Blavatsky, elle désigne la plus petite borne supérieure sur les loteries  $L$  et  $L'$  en termes de dominance stochastique. Il n'existe donc pas de loterie qui puisse dominer stochastiquement  $L$  et  $L'$  et qui est dominée par  $L \vee L'$ .

fixant le paramètre  $\lambda$ . Dans un premier temps nous fixons le paramètre  $\lambda$  à 1. C'est-à-dire que nous considérons que  $\phi(x) = x$ .

Type du fonds	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>
$\mu$	3,06 %	1,82 %	0,92 %	4,79 %	0,76 %
$\sigma$	9,06 %	6,17 %	3,55 %	11,29 %	10,76 %
Fonction objectif	0.23	0.31	0.58	0.17	0.38
$\rho$ optimal	15.16	16.77	10.80	14.91	7.44

**TABLE 2.8** – Résultats de l'optimisation unidimensionnelle de  $\lambda$  avec la méthode LBB

En analysant les résultats du tableau 2.8, nous remarquons que la valeur du paramètre  $\rho$  dépend fortement du couple  $(\mu, \sigma)$  qui caractérise chaque fonds.

Nous constatons également que l'aversion au risque  $\rho$  est relativement élevée pour les fonds qui sont composés d'au moins 50 % en actions, notamment les fonds *A* et *B*. Bien que cela puisse paraître contre-intuitif à première vue, en analysant les fonds *A*, *D* et *E* qui ont une volatilité similaire, on observe une relation décroissante entre rendements et aversion au risque : plus l'individu est risquophile, plus il est prêt à accepter des rendements plus faibles à volatilité constante. De même, pour les fonds *C* et *E*, à rendement similaire on observe une relation décroissante entre aversion au risque et volatilité.

Le but de l'étude étant de proposer une méthodologie pour caractériser une solution d'incitation, le choix du fonds du support en UC n'est pas important. Nous continuons donc notre étude en nous concentrant sur le fonds *A*.

### 2.3.3.5 Calibrage de la fonction discriminante

Le calibrage de la fonction discriminante  $\phi(\cdot)$  revient à calibrer le paramètre  $\lambda$ . Dans un premier temps, nous effectuons une optimisation unidimensionnelle en fixant le paramètre  $\rho$ , nous attribuons à  $\rho$  des valeurs allant de 2 à 11. Le problème d'optimisation unidimensionnel s'écrit :

$$\tilde{\lambda} = \underset{\lambda}{\operatorname{argmin}} \sum_{x \in \mathcal{X}} (F_L(x, \lambda) - F_{euro}(x))^2$$

Valeurs de $\rho$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Fonction objectif	4.58	3.76	0.88	0.19	0.12	0.132	0.152	0.17	0.184	0.196
$\lambda$ optimal	0.003	7.5	11.5	7.87	5	3.56	2.75	2.23	1.88	1.61

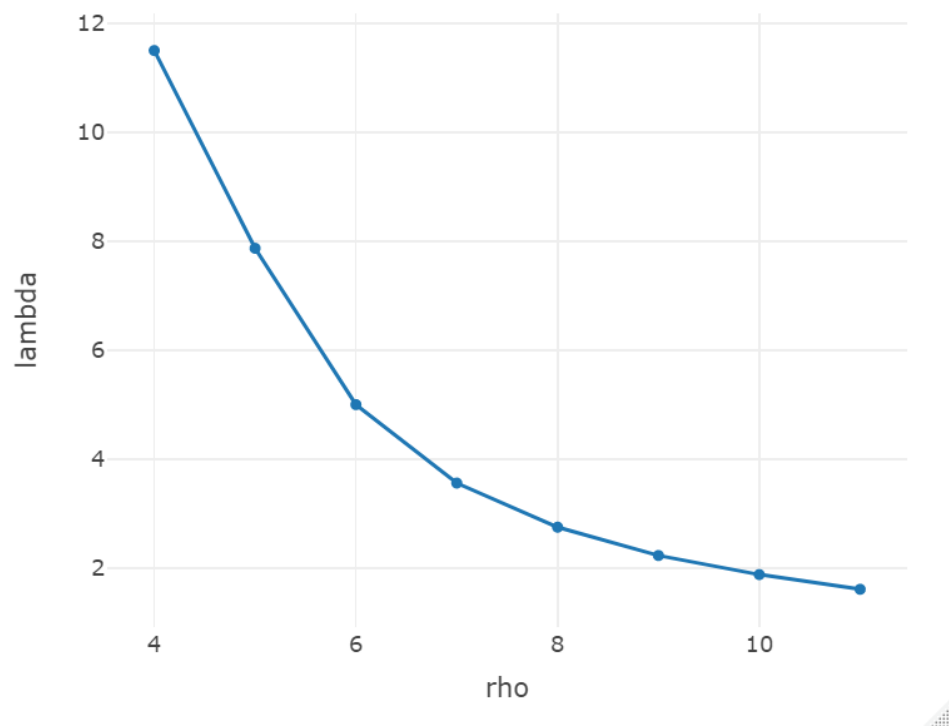
**TABLE 2.9** – Résultats de l'optimisation unidimensionnelle (L-BFGS-B) de  $\lambda$  pour le fonds *A*

De manière analogue aux résultats du tableau 2.7, le tableau 2.9 synthétise les résultats



obtenus lors de l'optimisation unidimensionnelle du paramètre  $\lambda$  en fixant le paramètre  $\rho$ . L'effet de compensation s'observe de même pour l'optimisation unidimensionnelle de  $\lambda$  pour un  $\rho$  fixé de 2 à 3. Cependant, et contrairement aux résultats du tableau 2.7, les résultats obtenus pour le paramètre  $\lambda$  ne sont décroissants qu'à partir de  $\rho \geq 4$ . Ceci est dû au fait que l'algorithme n'a pas bien convergé dans le cas de  $\rho \leq 3$ . Ceci est observable au niveau de la valeur de la fonction objectif qui est significativement plus élevée que les valeurs optimales prises dans les cas  $\rho \geq 4$ .

La figure 2.9 ci-dessous présente l'évolution de la valeur optimale de  $\lambda$  en fonction de  $\rho$  à partir de  $\rho \geq 4$ .



**FIGURE 2.9** – Évolution de la valeur optimale de  $\lambda$  en fonction de  $\rho$

Le but étant de minimiser la fonction objectif, on s'intéresse uniquement aux valeurs du paramètre  $\lambda$  qui correspondent à des valeurs de  $\rho \geq 4$ . La figure 2.9 évoque également une relation décroissante entre les deux paramètres et la conclusion est donc similaire à la partie précédente.

### Sensibilité de $\lambda$ au choix du type de fonds

Similairement à l'analyse du choix du type de fonds pour l'optimisation unidimensionnelle du paramètre  $\rho$ , nous analysons l'effet du choix du type de fonds sur la valeur du paramètre  $\lambda$ .

Type du fonds	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>
$\mu$	3,05 %	1,82 %	0,92 %	4,79 %	0,76 %
$\sigma$	9,06 %	6,17 %	3,55 %	11,29 %	10,76 %
<b>Fonction objectif</b>	0.19	0.34	0.6	3.7	0.41
<b><math>\lambda</math> optimal</b>	7.87	3.06	1.17	3.74	1.31

**TABLE 2.10** – Résultats de l'optimisation unidimensionnelle de  $\rho$  avec la méthode LBB

D'après le tableau 2.10, le choix du type fonds a donc un effet sur la valeur du paramètre  $\lambda$ . Cet effet est attendu et logique étant donné que nous avons détecté dans nos analyses précédentes une compensation entre les deux paramètres. Par conséquent, si le choix du couple  $(\mu, \sigma)$  agit sur la valeur de  $\rho$ , il agit mécaniquement sur la valeur de  $\lambda$ .

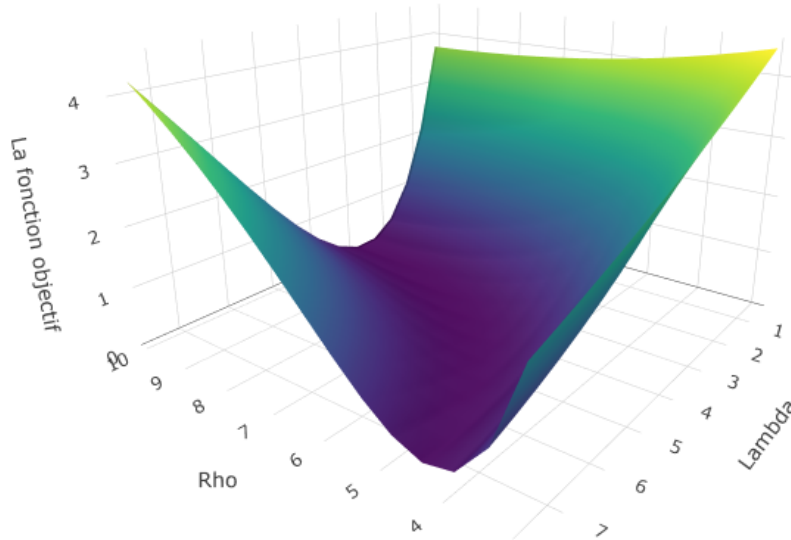
Aussi, le choix des valeurs initiales de paramètres est important pour chaque technique d'optimisation. Les valeurs initiales doivent être suffisamment proches des optimaux pour éviter que cela ralentisse l'algorithme d'optimisation.

#### 2.3.3.6 Calibrage bidimensionnel

Il ressort des calibrages unidimensionnels de  $\rho$  et  $\lambda$  que ces deux paramètres sont interdépendants et doivent donc être calibrés simultanément. Dans ce cas le problème d'optimisation bidimensionnel s'écrit :

$$(\tilde{\rho}, \tilde{\lambda}) = \underset{x \in \mathcal{X}}{\operatorname{argmin}_{(\rho, \lambda)}} \sum (F_L(x, \rho, \lambda) - F_{euro}(x))^2$$

Les représentations sous forme de surface sont utiles pour visualiser les valeurs que prend la fonction objectif en fonction des différentes valeurs des paramètres. Dans un premier temps, nous avons représenté graphiquement la fonction objectif en fonction des deux paramètres  $\rho$  et  $\lambda$ . Nous avons utilisé une grille de 240 points, avec  $\rho \in [3, 10]$  et  $\lambda \in [0.5, 8]$  variant d'un pas de 0.5 pour chaque paramètre. Le but est d'obtenir l'allure de la surface de calibrage.



**FIGURE 2.10** – Exemple de surface de calibrage du fonds A

À travers 2.10 nous retrouvons la relation de décroissance constatée entre  $\rho$  et  $\lambda$ . Pour des valeurs de fonction objectif égales, le paramètre  $\lambda$  varie dans le sens inverse de  $\rho$ . Il n'est donc pas possible de séparer le paramètre  $\lambda$  de  $\rho$ . Nous effectuons dans un premier temps une optimisation de la fonction objectif en utilisant les deux algorithmes présentés dans la subsection 2.3.3.2. Le tableau 2.11 présenté ci-dessous synthétise les résultats obtenus lors de l'optimisation bidimensionnelle.

Type du fonds	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
$\mu$	3,05 %	1,82 %	0,92 %	4,79 %	0,76 %
$\sigma$	9,06 %	6,17 %	3,55 %	11,29 %	10,76 %
Fonction objectif	0.12	0.28	0.30	0.12	0.28
$\rho$ optimal	6.06	103.2	232.48	10	65.18
$\lambda$ optimal	4.88	0.108	0.07	2.31	0.08

**TABLE 2.11** – Résultats de l'optimisation bidimensionnelle sans contrainte avec la méthode LBB

D'après le tableau 2.11, nous constatons que le paramètre  $\rho$  est très élevé pour les fonds *B* et *C*. Bien qu'il existe une vaste littérature sur la mesure de l'aversion pour le risque, il n'y a pas encore d'estimation communément acceptée. Les valeurs attendues du coefficient de l'aversion relative au risque  $\rho$  se situent généralement entre 1 et 3, mais il existe un large éventail d'estimations dans la littérature allant de 0.2 à 10 en général selon [15].

Il est donc intéressant de contraindre le paramètre  $\lambda$  étant donné l'effet de compensation déduit des analyses unidimensionnelles dans la partie précédente pour des fins d'interprétabilité.

Le tableau 2.12 suivant présente les résultats obtenus lors de l'optimisation bidimensionnelle avec contrainte sur  $\lambda$  en utilisant la méthode LBB.

Type du fonds	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
$\mu$	3,05 %	1,82 %	0,92 %	4,79 %	0,76 %
$\sigma$	9,06 %	6,17 %	3,55 %	11,29 %	10,76 %
Contrainte sur $\lambda$	$\lambda \geq 1$	$\lambda \geq 1$	$\lambda \geq 1$	$\lambda \geq 1$	$\lambda \geq 1$
Fonction objectif	0.12	0.31	0.54	0.12	0.38
$\rho$ optimal	6.06	16.77	10.80	10	7.44
$\lambda$ optimal	4.88	1	1	2.31	1

**TABLE 2.12** – Résultats de l'optimisation bidimensionnelle avec contrainte sur  $\lambda$  avec la méthode LBB

En contraignant le paramètre  $\lambda$  à être supérieur à 1, la contrainte est saturée et donc  $\lambda$  devient égal à 1. L'effet attendu de compensation entre les paramètres est obtenu. De plus, en contraignant  $\lambda$  à être supérieur à 1 les paramètres  $\rho$  et  $\lambda$  des fonds *B* et *C* deviennent plus raisonnables. Pour la suite de l'étude, nous avons choisi de travailler avec le fonds *A*. La méthode appliquée dans ce mémoire pourra être appliquée à chacun des cinq fonds.

Dans la suite de l'étude, nous retenons le fonds *A* comme fonds en UC. Ainsi, nous retenons les paramètres suivants  $\rho = 6.06$  et  $\lambda = 4.88$ .

À travers cette partie, nous avons montré comment le calibrage des paramètres du modèle de choix a été effectué. Ainsi, nous avons expliqué le choix de nos fonctions objectifs pour calibrer les paramètres de notre modèle. Celles-ci doivent tenir compte de la distribution des parts en UC (ou part en euros) du portefeuille étudié.

De cette manière, nous avons déterminé les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  qui caractérisent le rendement  $Z$  de chaque support. Nous avons également déterminé les paramètres  $\rho$  et  $\lambda$  propres au modèle de Blavatsky. Nous avons tenté de mettre en lumière la complexité de l'optimisation étant donné le volume de la base de données et le nombre de paramètres à calibrer.

Ayant explicité dans ce chapitre la méthodologie de calibrage des paramètres de notre modèle, désormais nous allons pouvoir caractériser la solution d'incitation financière choisie : un bonus sur la participation aux bénéfices.

# Chapitre 3

## Programme d'optimisation de l'assureur

Après avoir calibré les paramètres relatifs au modèle de décision, nous nous intéressons à présent au point de vue de l'assureur. L'assureur cherche à maximiser un objectif bien précis. Dans notre étude nous considérons que l'assureur cherche à maximiser la probabilité que la part d'UC globale de son portefeuille soit supérieure ou égale à une proportion cible. Finalement, nous mettrons en évidence les conclusions ainsi que les limites de notre cas d'étude afin de clôturer cette partie.

### 3.1 Réponses aux bonus et programme de l'assureur

#### 3.1.1 Une campagne d'incitation à la réorientation de l'épargne vers les UC

Notre campagne d'incitation est de type bonus sur rendement. Elle agit sur la revalorisation de la PM totale du fonds en euros. Nous rappelons que la richesse finale attendue de l'assuré se présente sous la forme suivante :  $R = w_{euro}(1 + \tau_A)PM + (1 - w_{euro})(1 + Z)PM$ .

Nous rappelons que  $\tau_A$  est le taux servi auquel s'attend l'assuré à l'année  $n$ , nous considérons dans notre étude qu'il est égal au taux servi à l'année  $n - 1$ . L'assureur dispose d'un budget de PB à distribuer chaque année aux assurés. Nous considérons que l'assureur distribue le même budget à l'année  $n$ . Nous rappelons que ceci est hypothèse raisonnable (comme expliqué dans la section 2.3.1.2). Le budget de l'assuré est affecté par produit.

Dans le tableau 2.3, nous avons présenté les taux servis moyens par produit. Nous rappelons, par exemple, que pour le produit 1 nous disposons d'un budget de 2.04% de la PM en euro vue à  $n - 1$ . Pour formaliser, nous pouvons noter cette grandeur comme suit  $Budget_1 = 2.04\% \times PM_{euro_{1_{n-1}}}$ , avec  $PM_{euro_{1_{n-1}}}$  est la PM totale du fonds en euros à  $n - 1$ . Pour chaque produit  $i$ , telle que  $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ , le budget pour chaque produit s'écrit comme suit :

$Budget_i = TSM_i \times PM_{euro_{i_{n-1}}}$ , avec  $TSM_i$  est le taux servi moyen par produit  $i$ .

Nous rappelons que la PB constitue un levier de pilotage très important pour l'assureur. En effet, c'est l'assureur qui décide de distribuer la PB discrétionnaire aux assurés comme il le souhaite. Tout en respectant évidemment la contrainte que l'assureur doit servir au moins le TMG. Par conséquent, le taux final servi à l'assuré est  $max(TMG, Taux\ servi)$ .

Dans le cas de notre étude, nous souhaitons distribuer la PB de telle manière à maximiser la probabilité que la part d'UC globale du portefeuille de l'assureur soit supérieure ou égale à une proportion cible que nous notons  $uc^*$ . Pour ce faire, nous bonifions l'effort d'arbitrage des assurés qui arbitrent vers les fonds en UC en survalorisant leurs taux servis. L'objectif de ce bonus est d'inciter les assurés à arbitrer dans le sens euros vers UC.

Le taux servi final attendu  $\tau_{f_A}$  à l'assuré sera donc de la forme  $\tau_{f_A} = \tau_A + Bonus$ , avec  $Bonus$  comme la survalorisation des contrats éligibles au bonus. Le taux final servi est de la forme  $\tau_f = \tau_0 + Bonus$ , où  $\tau_0$  est la grandeur calculée servie aux assurés qui n'ont pas arbitré ( ou qui n'ont pas suffisamment arbitré) pour être éligibles à une survalorisation.

Nous expliquons dans la partie suivante le type de bonus et seuils que nous avons choisi.

### 3.1.1.1 Effets attendus d'une campagne d'incitation

Après avoir analysé le passif, il est possible d'anticiper la réaction que peuvent avoir les assurés face à des campagnes commerciales offrant des avantages conditionnellement à un taux minimum d'unité de compte en portefeuille à l'instar d'une bonification des taux servis ou d'une réduction de frais.

Au premier abord nous pouvons distinguer entre trois types d'assurés :

- Un assuré qui mesure le compromis entre l'effort demandé en termes de réorientation de l'épargne et la bonification reçue. Ce type d'assurés se montrera réactif à ces campagnes ;
- Un assuré insensible à ce type de campagnes commerciales. Il s'agit par exemple des personnes très averses au risque ou de personnes utilisant le produit à des fins patrimoniales (sécurisation du capital et avantage fiscal).
- Un assuré déjà éligible aux avantages, car il vérifie le seuil cible (fixé par l'assureur). Ce type d'assurés sera récompensé pour l'effort réalisé par le passé. Il n'est donc pas directement incité à arbitrer davantage. Cependant, la campagne d'incitation l'incite à maintenir son niveau de part en UC pour bénéficier des avantages.

Si l'effort d'arbitrage vers les unités de compte est trop important, l'épargnant pourrait se montrer insensible à la campagne. De plus, si le seuil d'éligibilité est trop bas, une grande partie des assurés dits passagers clandestins bénéficiera des avantages de la campagne d'incitation sans effectuer d'arbitrage, ce qui se traduira par un coût élevé pour l'assureur. Comment peut-on fixer les niveaux de bonification ? Et comment intégrer cette bonification à la politique

de taux servi ?

### 3.1.1.2 Solution de bonification

Le problème de l'assureur est un problème de maximisation de la probabilité de la part d'UC globale des assurés détenant au moins une part cible  $uc^*$  du fonds en UC. Les bonus servis aux assurés sont déterminés en fonction de seuils que nous déterminerons en parallèle avec les bonus. La fonction objectif s'écrit comme suit :

$$(\tilde{B}, \tilde{S}) = \operatorname{argmax}_{B,S} \mathbb{P}(w_{uc} \geq uc^*) = \operatorname{argmax}_{B,S} F_{L_{euro}}(1 - uc^*);^1$$

Dans un premier temps, nous proposons la solution de bonification suivante qui s'inscrit dans le cadre de la politique de taux servi. Celle-ci se base sur une modulation du rendement en fonction :

- De la proportion investie en UC ayant vocation première à récompenser « l'effort passé » des épargnants tout en encourageant à maintenir leur niveau actuel. Cette vocation se traduit par un seuil absolu de part en UC à partir duquel les assurés seront éligibles au bonus correspondant ;
- De la variation de la proportion en UC, ayant vocation à rémunérer l'effort réalisé par l'assuré. Cette vocation se traduit par un seuil de variation de part en UC et un bonus correspondant.

Pour résumer, nous cherchons un Bonus que nous notons  $B$  tel que  $\tau_f = \tau + B$  et un Seuil  $S$  de telle manière à maximiser les arbitrages vers les fonds en UC.

Soient  $B = (B_1, B_S)$  un vecteur de bonus et  $S = (Seuil_{Variation}, Seuil_{Absolu})$  un vecteur de seuils.

- Les contrats éligibles au bonus  $B_1$  sont les contrats qui arbitrent avec une variation de part UC dans le sens « Euros vers UC » au moins égale au  $Seuil_{Variation}$ .
- Les contrats éligibles au bonus  $B_S$  sont les contrats qui disposent d'une part en UC au moins égale à  $Seuil_{Absolu}$ .

Le bonus  $B$  s'écrit donc sous la forme suivante :  $B = B_1 \mathbb{1}_{VarUC \geq Seuil_{Variation}} + B_S \mathbb{1}_{partUC \geq Seuil_{Absolu}}$  ; avec  $partUC$  et  $VarUC$  qui représentent (respectivement) la part UC finale de l'assuré après arbitrage et la variation en fonds en UC qu'effectue l'assuré.

Nous ne connaissons pas les grandeurs  $partUC$  et  $VarUC$ . Nous travaillons sur l'espace des états possibles  $\mathcal{W}_{euro} = \{0.01, 0.02, \dots, 0.99\}$ . Les probabilités de se situer dans chacun des états de  $\mathcal{W}_{euro}$  correspondent aux probabilités  $Q(A_i)$  définies dans la section 2.2.4.2 que nous noterons  $Q_i$ . Nous rappelons que  $A_i$  correspond à une alternative et donc un état caractérisé par un poids en fonds en euros  $w_{euro_i} \in \mathcal{W}_{euro}$ .

Par conséquent, la part en UC finale  $\mathbb{E}(partUC)$  ainsi que la variation en UC finale  $\mathbb{E}(VarUC)$  s'expriment comme suit :

---

1. La fonction  $F_{L_{euro}}$  est définie dans la section 2.2.3.2

$\mathbb{E}(partUC) = \sum_{i=1}^{99} (1 - w_{euro_i}) \times Q_i$  et  $\mathbb{E}(VarUC) = \sum_{i=1}^{99} (1 - w_{euro_i} - partUCInit) \times Q_i$ , avec  $partUCInit$  la part du fonds en UC initiale de l'assuré.

Par la suite, nous présentons des études de sensibilités par rapport au seuil  $S = (Seuil_{Variation}, Seuil_{Absolu})$  et au bonus correspondant  $B = (B_1, B_S)$ . L'objectif de ces travaux préliminaires est de comprendre le fonctionnement du seuil  $S$  et du bonus correspondant  $B$ .

### 3.1.2 Sensibilités par rapport à la solution de bonification

#### 3.1.2.1 Sensibilités de la distribution par rapport aux bonus

Nous présentons dans ce qui suit les sensibilités de la distribution  $Q$  par rapport aux Bonus  $B = (B_1, B_2)$ .

Pour calculer ces sensibilités nous avons fixé certains paramètres. Ils se présentent comme suit :

Type de paramètre	Valeur du paramètre
Type du fonds	A
$\mu$	3,05 %
$\sigma$	9,06 %
Provision mathématique	1
Taux servi	1,93 %
TMG	0.0698 %
Nombre de simulation ( $nsim$ )	10000
Nombre d'itérations ( $Niter$ )	50
Nombre de simulation ( $nsim$ )	10000
Part en UC initiale	30 %
$\rho$	6.06
$\lambda$	4.88

TABLE 3.1 – Paramètres fixés communs au calcul des sensibilités

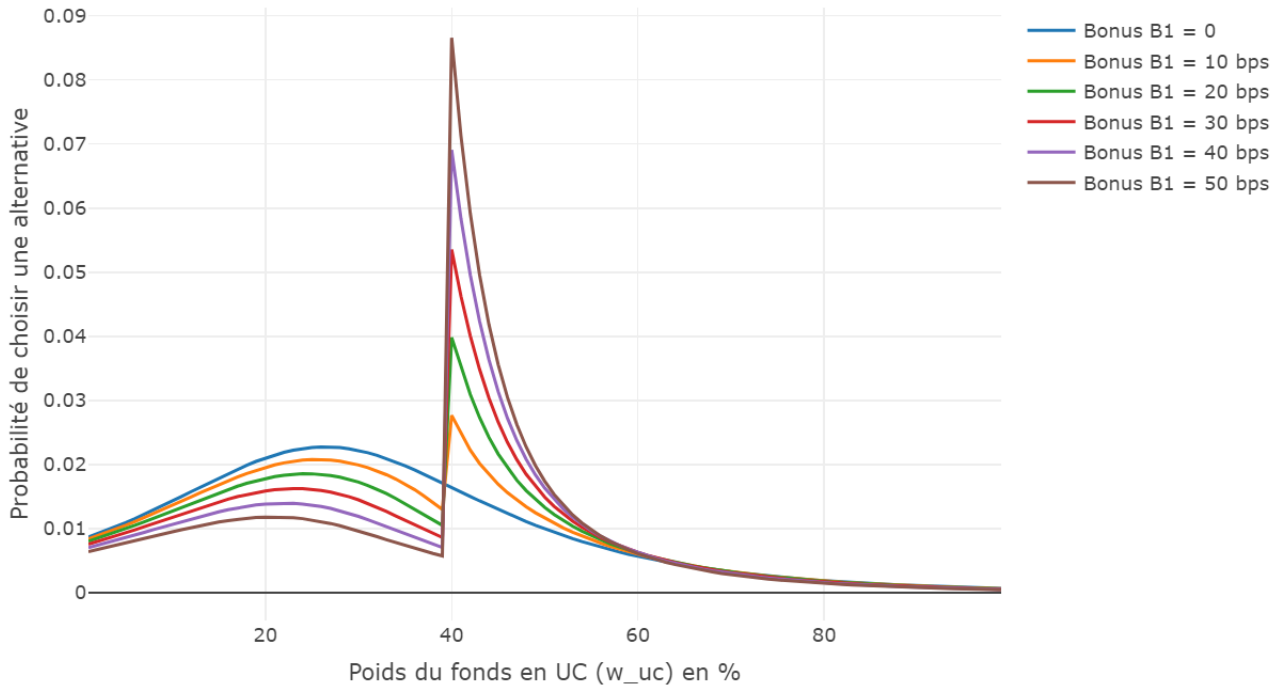
#### Sensibilité des probabilités par rapport au bonus $B_1$

Pour étudier l'effet de l'ajout d'un bonus sur l'arbitrage entre fonds en euros et en UC, nous désactivons le bonus  $B_S$ .

Seuil de variation UC ( $Seuil_{Variation}$ )	10 %
Seuil absolu UC ( $Seuil_{Absolu}$ )	40 %
Bonus $B_1$	0 à 50 bps
Bonus $B_S$	0 %

TABLE 3.2 – Paramètres de sensibilités par rapport au Bonus  $B_1$





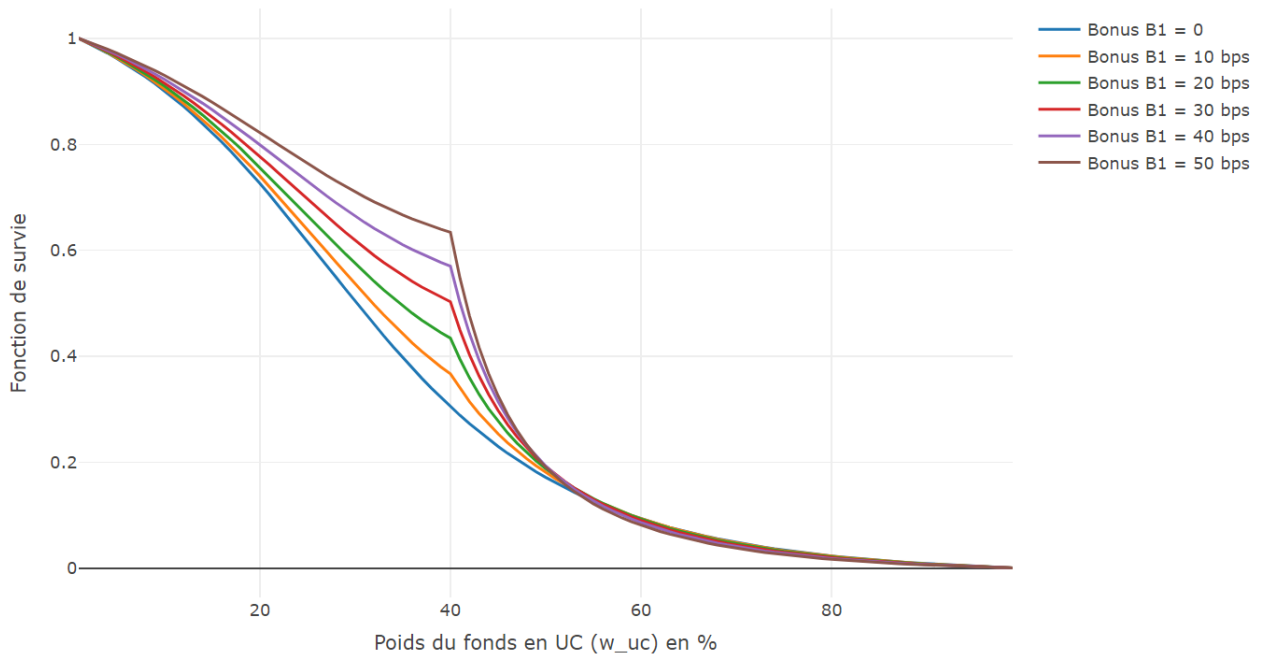
**FIGURE 3.1** – Sensibilité par rapport à des variations du bonus  $B_1$  (fonction de masse)

Nous observons un pic à  $w_{uc} = 40\%$  dès que le bonus  $B_1$  est activé ( $B_1 \neq 0$ ). En effet la part initiale de l'assuré est de 30%, et pour bénéficier du bonus  $B_1$  l'assuré doit arbitrer vers le fonds en UC et faire varier sa proportion en UC d'au moins 10%. Selon le modèle de Blavastkyy, la meilleure alternative est l'alternative la plus probable (voir section 2.2.4.1). L'alternative  $A_{40}$  qui correspond à  $w_{uc} = 40\%$  est la meilleure alternative (au sens du modèle de choix). Elle représente le choix le plus probable. Dans le cas sans bonus  $B_1 = 0$ , nous constatons que  $A_{40}$  n'est pas la meilleure alternative. Nous remarquons également que la probabilité  $\mathbb{P}(w_{uc} = 40\%)$  augmente avec le bonus  $B_1$ . Ceci est un effet attendu. Le bonus  $B_1$  récompense l'assuré qui fait varier sa proportion de fonds en UC de 10% dans le sens euros vers UC. Ainsi, l'assuré a intérêt à arbitrer vers les fonds en UC au moins de 10% pour encaisser le bonus. Plus le bonus  $B_1$  augmente plus l'alternative  $A_{40}$  devient plus probable.

Valeurs de $B_1$	0	10 bps	20 bps	30 bps	40 bps	50 bps
<b>Meilleure alternative (<math>Best</math>)</b>	26%	40%	40%	40%	40%	40%
$\mathbb{P}(w_{uc} = Best)$	2.27%	2.77%	3.98%	5.35%	6.91%	8.66%
$\mathbb{P}(w_{uc} \geq 40\%)$	30.5%	36.7%	43.4%	50.3%	57%	63.4%

**TABLE 3.3** – Évolution de la meilleure alternative en fonction du bonus  $B_1$

D'après le tableau 3.3, en absence du bonus  $B_1$  la meilleure alternative ou le meilleur choix pour l'assuré est  $w_{uc} = 26\%$ . Il y a donc clairement un effet d'incitation à investir sur plus de fonds en UC puisque la probabilité  $\mathbb{P}(w_{uc} = 40\%)$  augmente de manière croissante en fonction du bonus  $B_1$ .



**FIGURE 3.2** – Sensibilité par rapport à des variations du bonus  $B_1$   
(Fonction de survie)

En traçant la fonction de survie 3.2 des poids  $w_{uc}$ , nous remarquons que globalement la probabilité que l'assuré ait plus de 40% de part en UC est croissante en fonction du bonus  $B_1$ . Ceci est logique étant donné que le but de l'assureur serait de maximiser par exemple la probabilité que la part d'UC globale de son portefeuille soit supérieure ou égale à 40% de fonds en UC et donc maximiser  $\mathbb{P}(w_{uc} \geq 40\%)$ .

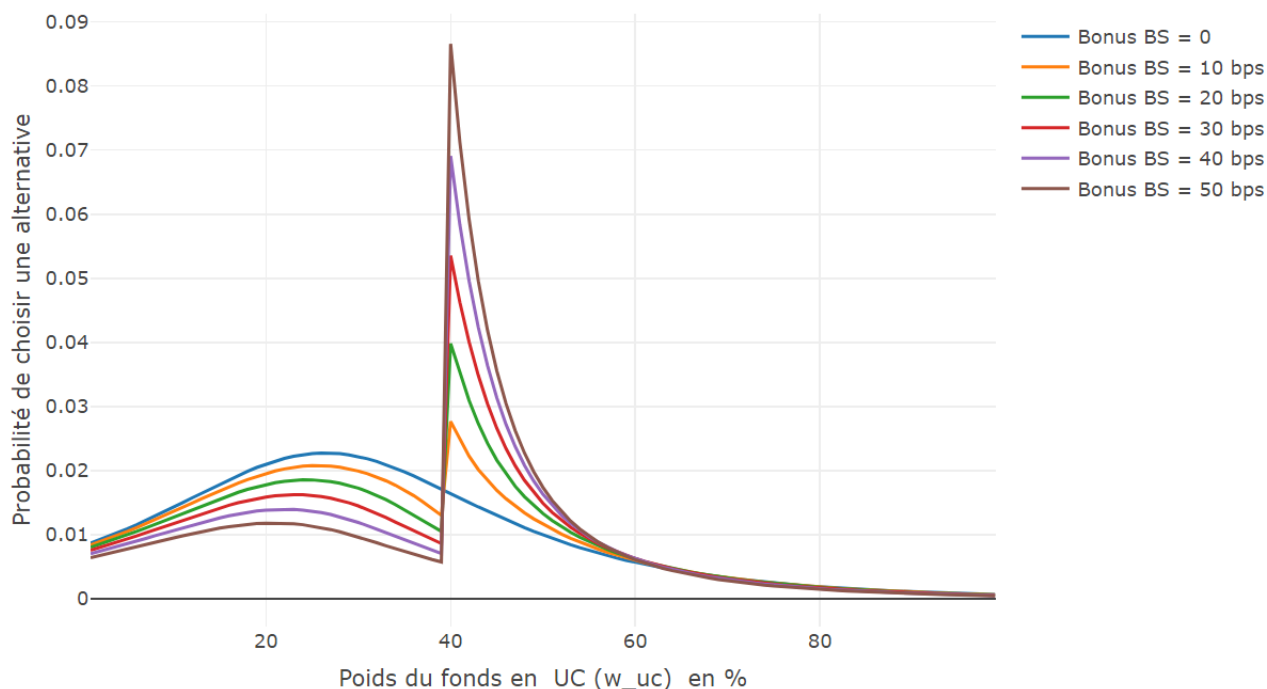
Il est également important de préciser que les arbitrages à la baisse n'ont pas une probabilité nulle mais sont moins probables que la meilleure alternative dans le cas où le bonus  $B_1 \neq 0$ .

#### Sensibilité des probabilités par rapport au bonus $B_S$

Pour étudier l'effet de l'ajout d'un bonus correspondant à un seuil absolu sur l'arbitrage entre fonds en euros et en UC, nous désactivons le bonus  $B_1$ .

<b>Seuil de variation UC (<math>Seuil_{Variation}</math>)</b>	10 %
<b>Seuil absolu UC (<math>Seuil_{Absolu}</math>)</b>	40 %
<b>Bonus <math>B_1</math></b>	0 %
<b>Bonus <math>B_S</math></b>	0 à 50 bps

**TABLE 3.4** – Paramètres de sensibilités par rapport au Bonus  $B_S$



**FIGURE 3.3** – Sensibilité par rapport à des variations du bonus  $B_S$  (fonction de masse)

D’après la figure 3.3, nous remarquons que le résultat obtenu est similaire au résultat précédent avec un seuil de variation UC de 10%. Ceci est un effet attendu, car dans ce cas nous avons considéré un seuil absolu  $Seuil_{Absolu} = 40\%$  et une part d’UC initiale de 30%. L’assuré, pour bénéficier du bonus, doit arbitrer de telle manière à avoir une part d’UC finale de 40%, ceci revient à faire varier la part en UC de l’assuré de 10% dans le sens euros vers UC. Par conséquent, ceci est équivalent à l’application d’un seuil de variation  $Seuil_{Variation}$  de 10%. Les résultats sont donc similaires au cas précédent d’un  $Seuil_{Variation}$  de 10%.

### 3.1.2.2 Sensibilités de la distribution par rapport aux seuils

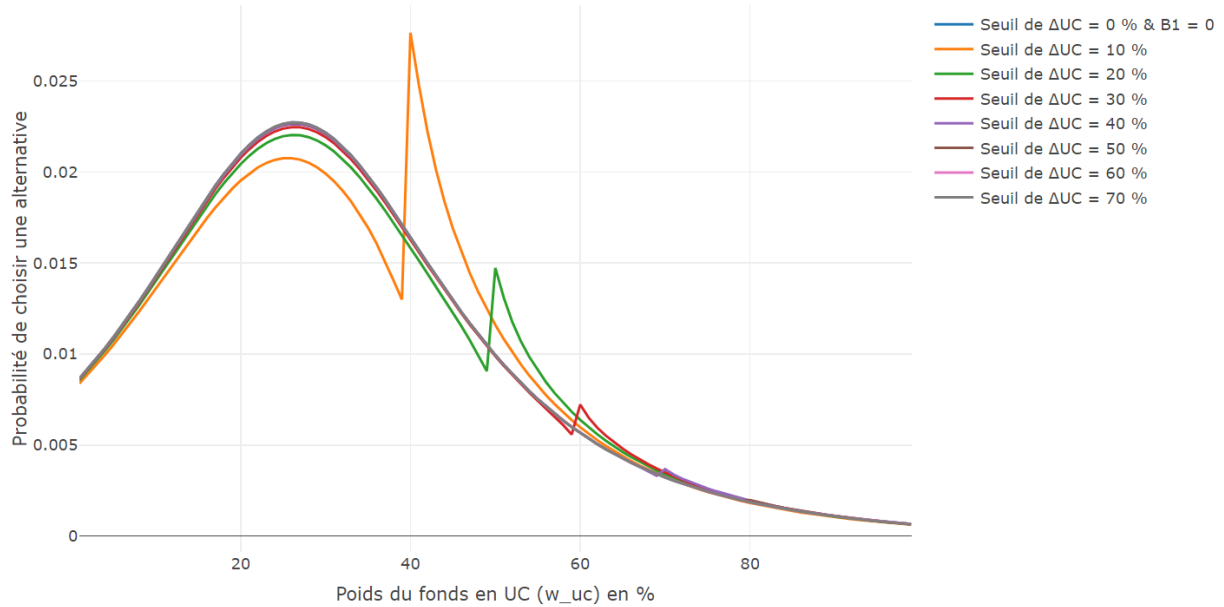
Nous présentons dans ce qui suit les sensibilités de la distribution  $Q$  par rapport aux seuils  $Seuil_{Variation}$  et  $Seuil_{Absolu}$ .

#### Sensibilité des probabilités par rapport au seuil de variation UC

Nous étudions les sensibilités avec les mêmes paramètres que ceux présentés dans le tableau 3.1 Nous considérons différents seuils de variations UC allant de 10% à 100% avec un bonus  $B_1$  fixe. Nous désactivons le bonus  $B_S = 0$  correspondant au seuil absolu  $Seuil_{Absolu}$ .

<b>Seuil de variation UC (<math>Seuil_{Variation}</math>)</b>	10 % à 70 %
<b>Seuil absolu UC (<math>Seuil_{Absolu}</math>)</b>	40%
<b>Bonus <math>B_1</math></b>	10 bps
<b>Bonus <math>B_S</math></b>	0 %

**TABLE 3.5** – Paramètres de sensibilités par rapport au seuil absolu  $Seuil_{Absolu}$



**FIGURE 3.4** – Sensibilité par rapport à des variations du seuil de variation UC (fonction de masse)

La courbe bleue correspond au cas sans bonus avec  $Seuil_{Variation} = 0\%$ . Nous remarquons que plus l'effort d'arbitrage demandé à l'assuré est important, plus la probabilité d'arbitrer vers  $partUCInit + Seuil_{Variation}$  diminue. De plus, à partir d'un  $Seuil_{Variation}$  de 60%, l'assuré préfère ne pas arbitrer même en proposant un bonus  $B_1$ . En effet, la courbe qui correspond au  $Seuil_{Variation} = 70\%$  coïncide avec la courbe bleue qui est le cas sans bonus. Ceci est expliqué par le rendement du fonds en euros. À partir du  $Seuil_{Variation} = 70\%$ , l'assuré atteint 100 % de fonds en UC et par conséquent il ne perçoit pas le bonus de PB, vu qu'il est à 0 % de fonds en euros.

$Seuil_{Variation}$	Meilleure alternative (Best)	$P(w_{uc} = Best)$	$P(w_{uc} \geq 40\%)$
0%	26%	2.27%	30.5%
10%	40%	2.77%	36.7%
20%	26%	2.20%	32.3%
30%	26%	2.25%	31.2%
40%	26%	2.26%	30.7%
50%	26%	2.27%	30.6%
60%	26%	2.27%	30.5%
70%	26%	2.27%	30.5%

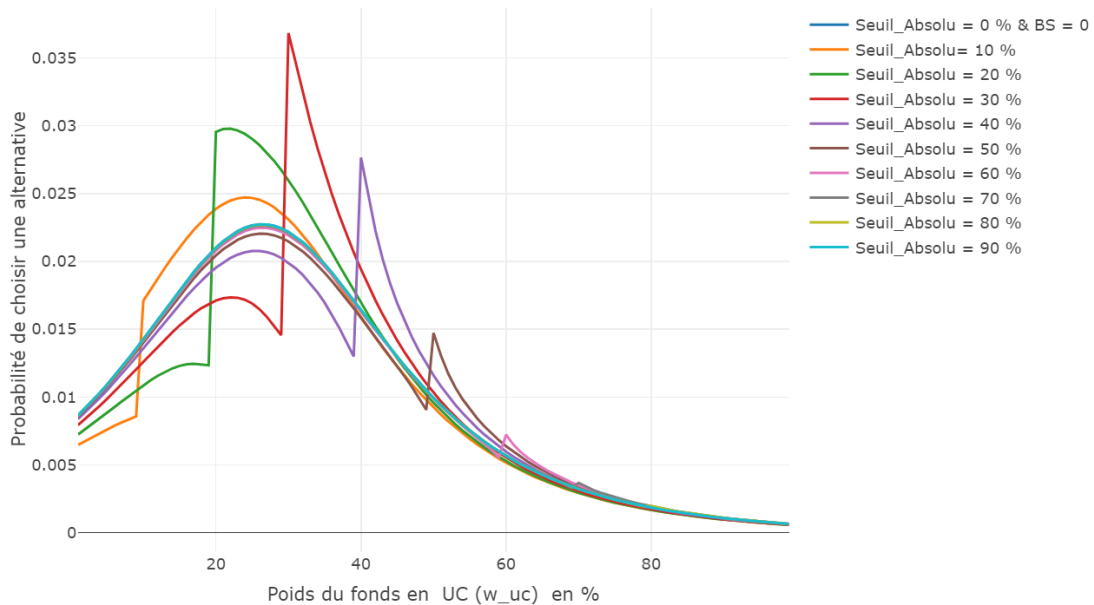
**TABLE 3.6** – Évolution de la meilleure alternative en fonction du  $Seuil_{Variation}$

D'après le tableau 3.6, nous remarquons que le choix le plus probable correspond au cas du  $Seuil_{Variation} = 10\%$ . Dans les autres cas, la meilleure alternative (le choix le plus probable) est de 26% et sa probabilité se stabilise à partir d'un seuil de variation  $Seuil_{Variation} = 50\%$ . Pour les  $Seuil_{Variation} = \{20\%, 30\%, 40\%, 50\%\}$  nous remarquons que la probabilité  $\mathbb{P}(w_{uc} = 40\%)$  augmente malgré le fait qu'elle ne soit pas la meilleure alternative (par rapport au cas sans bonus). C'est l'effet de l'incitation. Nous constatons, que la probabilité  $\mathbb{P}(w_{uc} \geq 40\%)$  atteint son maximum quand le  $Seuil_{Variation} = 10\%$ . Supposons que l'objectif de l'assureur est de maximiser  $\mathbb{P}(w_{uc} \geq 40\%)$  pour une part en UC initiale de 30%. Le choix pertinent d'un seuil de variation est de 10%.

### Sensibilité des probabilités par rapport au seuil absolu

<b>Seuil de variation UC (<math>Seuil_{Variation}</math>)</b>	10 %
<b>Seuil absolu UC (<math>Seuil_{Absolu}</math>)</b>	10 % à 90 %
<b>Bonus <math>B_1</math></b>	0 %
<b>Bonus <math>B_S</math></b>	10 bps

**TABLE 3.7** – Paramètres de sensibilités par rapport au seuil absolu  $Seuil_{Variation}$



**FIGURE 3.5** – Sensibilité par rapport à des variations du seuil absolu (fonction de masse)

D'après la figure 3.5, nous constatons que le choix le plus probable correspond au cas de  $Seuil_{Absolu} = 30\%$ . Ceci est cohérent dans la mesure où l'effort d'arbitrage demandé à l'assuré est moindre, voire nul, par rapport aux autres valeurs du  $Seuil_{Absolu}$ . La part initiale de l'assuré est de 30% de fonds en UC. À partir du  $Seuil_{Absolu} = 70\%$ , l'effet de l'incitation est très faible et les courbes se rapprochent de plus en plus du cas sans bonus. En effet, l'effort

demandé à l'assuré est très important, il doit faire varier sa part d'UC d'au moins 50% (pour les  $Seuil_{Absolu} \geq 70\%$ ) pour encaisser le bonus  $B_S$ . Cependant, la probabilité que l'assuré arbitre pour atteindre les seuils absolus  $\geq 70\%$  est faible mais n'est pas nulle.

$Seuil_{Absolu}$	Meilleure alternative ( $Best$ )	$\mathbb{P}(w_{uc} = Best)$	$\mathbb{P}(w_{uc} \geq 40\%)$
0%	26%	2.27%	30.5%
10%	24%	2.47%	28.3%
20%	22%	2.98%	29.3%
30%	30%	3.68%	31.6%
40%	40%	2.26%	36.7%
50%	26%	2.20%	32.3%
60%	26%	2.25%	31.2%
70%	26%	2.26%	30.7%
80%	26%	2.27%	30.6%
90%	26%	2.27%	30.5%

**TABLE 3.8** – Évolution de la meilleure alternative en fonction du  $Seuil_{Absolu}$

D'après le tableau 3.8, nous constatons que la meilleure alternative (le choix le plus probable), en regardant les différents seuils, correspond au cas de  $w_{uc} = 30\%$  pour un  $Seuil_{Absolu} = 30\%$ . Le deuxième choix le plus probable correspond au cas du  $Seuil_{Absolu} = 40\%$  avec  $w_{uc} = 40\%$ . La probabilité de la meilleure alternative dans le premier cas est supérieure au deuxième cas. Ceci est expliqué par l'effort demandé à l'assuré. On demande moins d'effort à l'assuré dans le cas de  $Seuil_{Absolu} = 30\%$ , par rapport au cas du  $Seuil_{Absolu} = 40\%$ . En effet, la part d'UC initiale de l'assuré est de 30%, donc même sans effort d'arbitrage l'assuré encaisse le bonus  $B_S$ . Le choix des seuils d'éligibilité au bonus  $B_1$  et  $B_S$  devrait être judicieux et doit prendre en compte la part d'UC initiale de l'assuré. Par exemple, pour maximiser la probabilité  $\mathbb{P}(w_{uc} \geq 40\%)$  un  $Seuil_{Absolu}$  de 40% serait pertinent. Nous observons sur le tableau qu'avec ce choix, nous maximisons  $\mathbb{P}(w_{uc} \geq 40\%)$ .

### 3.1.3 Programme de l'assureur

Dans la base de données étudiée, la part en UC initiale est différente d'un assuré à un autre. D'après les analyses ci-dessus, nous avons constaté que pour maximiser la probabilité la meilleure alternative<sup>2</sup>, le choix des seuils ( $Seuil_{Absolu}$  et  $Seuil_{Variation}$ ) dépend fortement de la valeur de la part en UC initiale.

Le choix de l'objectif à maximiser dépend de la stratégie de l'assureur. Nous supposons que l'assureur souhaite maximiser la probabilité que les assurés détiennent au moins 30% de part en UC. La part en UC cible  $uc^*$  de l'assureur est donc de 30%. La fonction objectif s'écrit dans ce cas comme suit :

$$(\tilde{B}, \tilde{S}) = \operatorname{argmax}_{B,S} \mathbb{P}(w_{uc} \geq 30\%) = \operatorname{argmax}_{B,S} FL_{euro}(70\%);$$

Dans la suite, nous calculons des bonus et des seuils optimaux de manière à maximiser la probabilité que la part d'UC globale de son portefeuille soit supérieure ou égale à 30% d'UC.

Pour tenir compte des différents valeurs des part en UC initiales, nous avons choisi de travailler avec trois part de fonds en UC initiales. Nous optimisons donc pour le cas d'un assuré qui a une part d'UC initiale de 0%, 10% et 20%.

#### 3.1.3.1 Calcul des bonus et seuils optimaux

Le tableau 3.10 présente les valeurs initiales utilisées pour calculer les seuils optimaux ainsi que leurs bonus correspondants. Comme nous l'avons expliqué dans la partie précédente, le choix des valeurs initiales est très important et doit avoir du sens. Le tableau 3.9 ci-dessous, présente les paramètres d'initialisation utilisés pour le calcul des bonus et seuils optimaux.

Tant que l'assureur ne cherche pas à maximiser une part en UC cible de 100%, la probabilité est strictement croissante du bonus servi aux assurés. Ceci est vérifié dans notre car l'ensemble des états possibles que nous considérons est  $\mathcal{W}_{euro} = \{0.01, 0.02, \dots, 0.99\}'$ .

Nous considérons, dans un premier temps, une borne supérieure de 100 *bps* pour les bonus. Sur le *benchmark* effectué des bonus que l'assureur propose en pratique à ses assurés, 100 *bps* représente la valeur maximale observée.

Paramètres	Initialisation	Borne inférieure	Borne supérieure
$Seuil_{Variation}$	(*)	0%	100 %
$Seuil_{Absolu}$	30 %	0%	100 %
$B_1$	1 bps	0%	100 bps
$B_S$	1 bps	0%	100 bps

TABLE 3.9 – Paramètres d'initialisation de l'optimisation des bonus et seuils

2. labellisée *Best* dans l'algorithme de Blavatsky.

L'initialisation du  $Seuil_{variation}$  dépend de la part en UC initiale.

Part en UC initiale	Initialisation du $Seuil_{variation}$
0 %	30 %
10 %	20 %
20 %	10 %

TABLE 3.10 – (\*) Initialisation du  $Seuil_{variation}$

### Calcul avec seuils fixés sans contrainte sur la somme des bonus

Dans un premier temps, nous fixons les  $Seuil_{variation}$  selon la  $PartUC$  initiale et le  $Seuil_{Absolu}$  à 30% qui correspond à la cible de l'assureur. Les résultats de cette optimisation sont présentés dans le tableau 3.11.

Résultats	$PartUC = 0\%$	$PartUC = 10\%$	$PartUC = 20\%$
$Seuil_{variation}$ (fixé)	30 %	20 %	10%
$Seuil_{Absolu}$ (fixé)	30 %	30 %	30 %
$B_1$ optimal	100 bps	100 bps	100 bps
$B_S$ optimal	100 bps	100 bps	100 bps
$\mathbb{P}(w_{uc} \geq 30\%)$	99.62%	99.62%	99.62%

TABLE 3.11 – Résultats de l'optimisation des bonus avec seuils fixés

D'après le tableau 3.11, pour chaque  $PartUC$  nous obtenons les bonus  $B_1$  et  $B_S$  correspondants. Pour une part en UC initiale de 0% nous remarquons que  $B_1$  et  $B_S$  sont saturés à 100 bps. Ceci est expliqué par le fait que la probabilité est strictement croissante des bonus. Selon le modèle de Blavastkyy, en proposant à un assuré des bonus  $B_1$  et  $B_S$  de 100 bps, la probabilité qu'il arbitre jusqu'au moins 30% de part en UC est de 99.62%. La somme des bonus encaissée par l'assuré est de 200 bps dans le cas d'un arbitrage en respectant les deux conditions de seuil. Nous allons appliquer le même programme mais en plafonnant la somme des bonus ( $B_1 + B_S$ ) à 100 bps, pour que le bonus servi à un assuré remplissant les deux conditions de seuils soit réaliste.

Par la suite, nous calculons les quatre paramètres simultanément en plafonnant la somme des bonus à 100 bps.

### Calcul avec contrainte sur la somme des bonus

Le tableau 3.12 suivant présente les résultats d'optimisation des seuils ainsi que leurs bonus correspondants, tout en plafonnant la somme des bonus encaissés par l'assuré à 100 bps .



Résultats	$PartUC = 0\%$	$PartUC = 10\%$	$PartUC = 20\%$
<b><math>Seuil_{Variation}</math> optimal</b>	30 %	20 %	10 %
<b><math>Seuil_{Absolu}</math> optimal</b>	30 %	30 %	30 %
<b>Contrainte sur <math>B_1 + B_S</math></b>	$B_1 + B_S \leq 100 \text{ bps}$	$B_1 + B_S \leq 100 \text{ bps}$	$B_1 + B_S \leq 100 \text{ bps}$
<b><math>B_1</math> optimal</b>	48.23 bps	48.23 bps	48.23 bps
<b><math>B_S</math> optimal</b>	48.23 bps	48.23 bps	48.23 bps
$\mathbb{P}(w_{uc} \geq 30\%)$	95.36 %	95.36 %	95.36 %

**TABLE 3.12** – Résultats de l’optimisation des bonus et seuils avec contrainte sur la somme des bonus

D’après le tableau 3.12, nous obtenons pour chaque cas de  $PartUC$  le même bonus  $B_1$  et  $B_S$ . C’est un effet attendu, étant donné que les conditions des seuils ont été choisies de manière équivalente par  $PartUC$ . Nous remarquons également que le  $Seuil_{Absolu}$  optimal est de 30% qui correspond au seuil cible  $uc^*$ . Ces résultats sont cohérents avec les études de sensibilités par rapport aux bonus et aux seuils effectuées ci-dessus. En comparant ces résultats au cas de non application de la contrainte sur la somme des bonus (3.11), nous constatons que la fonction objectif passe de 99.6% à 95.4% pour des bonus divisés quasiment par deux. En servant des bonus de 48  $bps$  au lieu de 100  $bps$  l’assureur ne perd que 4.2% en termes de fonction objectif.

### 3.1.3.2 Distribution globale du portefeuille

Pour déterminer la distribution  $Q_G$  (moyenne) globale. La PM totale en euros finale attendue  $PM_{Totale}^{euro}$  s’écrit comme suit :

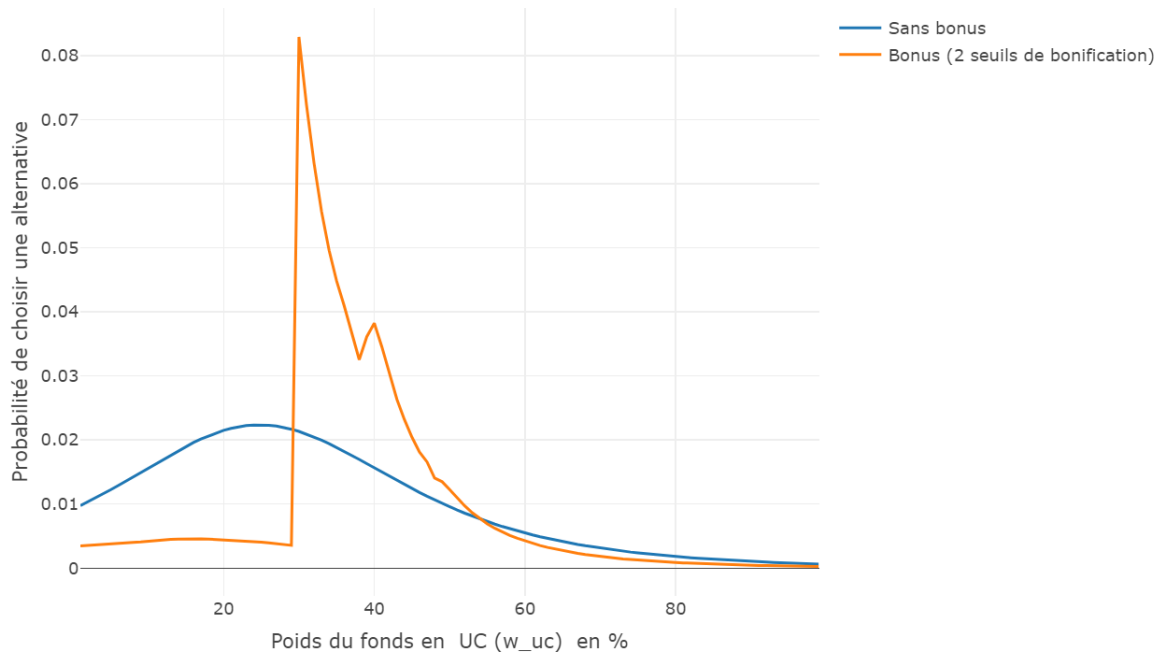
$$\mathbb{E}(PM_{Totale}^{euro}) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{99} w_{euro_i} \times PM_j \times Q_{ij}$$

Les sommes sont finies. Nous pouvons donc les permuter :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(PM_{Totale}^{euro}) &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{99} w_{euro_i} \times PM_j \times Q_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{99} \sum_{j=1}^N w_{euro_i} \times PM_j \times Q_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{99} w_{euro_i} \underbrace{\sum_{j=1}^N \frac{PM_j}{PM_T}}_{Q_i} \times Q_{ij} \times PM_T \\ &= \sum_{i=1}^{99} w_{euro_i} \times Q_i \times PM_T \end{aligned}$$

La distribution  $Q_G$  (de fonction de masse  $Q_i$ ) désigne la distribution globale du portefeuille.

Nous appliquons les résultats du programme d'assureur présenté dans le tableau 3.12 à l'ensemble des assurés. Nous considérons un seuil de variation en UC de 10 %. Le graphique suivant 3.6 présente les résultats obtenus.



**FIGURE 3.6** – Distribution globale du portefeuille avec et sans incitation financière (fonction de masse)

Le graphique 3.6 présente la distribution globale obtenue dans le cas d'application et de non application de l'incitation financière. L'effet de l'incitation financière est visible sur le graphique. En effet, le premier saut de la courbe orange correspond à  $w_{uc} = 30\%$  (le seuil absolu) et le deuxième saut correspond à  $w_{uc} = 40\%$ . Les interprétations sont similaires aux études de sensibilités effectuées.

### 3.1.4 Un bonus graduel selon la part en UC

Les programmes d'optimisation vus dans la section précédente permettent de calculer les bonus ainsi que les seuils optimaux, pour trois types d'assurés différenciés par leur part initiale en fonds en UC. Cependant, nous souhaitons appliquer ce programme à un portefeuille d'assurés. Cela pose deux types de problèmes : D'abord cela implique qu'il faut résoudre un nombre important de programmes d'optimisation, un pour chaque niveau initial de part d'UC présent dans le portefeuille. Ensuite, il sera difficile de communiquer un dispositif de bonification aussi complexe aux assurés.

Si nous calibrons les seuils ainsi que les bonus en utilisant une part moyenne d'UC, l'incitation pour un assuré dont la part d'UC est inférieure ne sera pas suffisante, et finalement l'assureur ne remplira pas son objectif aussi bien que prévu. L'assureur peut clairement optimiser davantage sa fonction objectif. C'est la raison pour laquelle nous avons appliqué un programme d'optimisation par strates en fonction du niveau de la part en UC.

Le choix du nombre de strates est très important. En effet, plus nous augmentons le nombre de strates, plus nous touchons efficacement le portefeuille d'assurés.

Ainsi, pour que la campagne d'incitation soit intelligible aux assurés, nous avons différencié le seuil de variation en part en UC  $Seuil_{Variation}$  en trois seuils de variation. Par conséquent, nous différencions également le bonus  $B_1$  (qui correspond au seuil  $Seuil_{Variation}$ ) en trois bonus.

Le problème de l'assureur est le même mais avec huit paramètres au lieu de quatre. Nous cherchons à maximiser la probabilité que la part d'UC globale de son portefeuille soit supérieure ou égale à 30%.

La fonction objectif s'écrit comme suit :

$$(\tilde{B}, \tilde{S}) = \operatorname{argmax}_{B,S} \mathbb{P}(w_{uc} \geq 30\%) = \operatorname{argmax}_{B,S} \mathbb{P}(w_{euro} \leq 70\%) = \operatorname{argmax}_{B,S} FL_{G_{euro}}(70\%).$$

Soient  $B = (B_1, B_2, B_3, B_S)$  un vecteur de bonus et  $S = (S_1, S_2, S_3, Seuil_{Absolu})$  un vecteur de seuils.

Nous rappelons que nous cherchons un bonus que nous notons  $B$  tel que le taux final servi attendu est  $\tau_{f_A} = \tau_A + B$  et un seuil  $S = (S_1, S_2, S_3, S_{Absolu})$  de telle manière à maximiser les arbitrages vers les fonds en UC.

De plus, nous utilisons trois seuils de variation en UC au lieu d'un seul seuil pour tenir compte des différentes parts en UC des assurés. Nous considérons que les assurés, selon leur part en UC initiale, peuvent être regroupés en quatre tranches définies comme suit :

- Tranche 1 :  $partUCInit \leq 10\%$  ;
- Tranche 2 :  $10\% < partUCInit \leq 20\%$  ;
- Tranche 3 :  $20\% < partUCInit \leq 30\%$  ;
- Tranche 4 :  $partUCInit > 30\%$ .

Nous calculons pour chaque tranche  $i$  la fonction de répartition  $F_{L_{i_{euro}}}$ <sup>3</sup> telle que  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Nous calculons ensuite la fonction de répartition globale  $F_{L_{Geuro}}$  définie comme suit :  $F_{L_{Geuro}} = \sum_{i=1}^4 \frac{PM_{Totale_i}}{PM_{Totale}} F_{L_{i_{euro}}}$ .

Les contrats éligibles au bonus  $B_i$  sont les contrats qui arbitrent avec une variation de part en UC dans le sens euros vers UC au moins égale au seuil  $S_i$ , avec  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Les contrats éligibles au bonus  $B_S$  sont les contrats qui disposent d'une part en UC au moins égale à  $Seuil_{Absolu}$ . L'assuré ne peut pas cumuler les trois bonus de variation UC, nous imposons des contraintes sur les seuils et sur les bonus. Cependant, il peut cumuler le bonus de variation avec le bonus de seuil absolu. L'objectif de la différenciation des seuils de variation est de toucher plus efficacement les assurés. Nous présentons dans ce qui suit, cas par cas les contrats éligibles à tout type de bonus.

Nous allons caractériser à présent les PM en euros éligibles au bonus.

$\forall w_{euro} \in \mathcal{W}_{euro}$ ,  $w_{uc} = 1 - w_{euro}$ . La probabilité de choix d'une alternative  $A_i$  pour un assuré  $j$  est notée  $Q_{ij}$ . Le paramètre  $N_k$  caractérise l'effectif de chaque produit d'épargne  $k$ , tel que  $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

- **Les contrats non éligibles au Bonus** sont les contrats qui vérifient les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} w_{uc} < S \\ (w_{uc} - partUCInit) < S_1 \end{cases}$$

Nous notons la PM en euros totale éligible à ce type de bonus  $PM_{NB}$ .

- **Les contrats éligibles au Bonus  $B_1$  uniquement** sont les contrats qui vérifient les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} w_{uc} < S \\ w_{uc} - partUCInit \in [S_1, S_2[ \end{cases}$$

Nous notons la PM en euros totale éligible à ce type de bonus  $PM_{B_1}$ .

- **Les contrats éligibles au Bonus  $B_2$  uniquement** sont les contrats qui vérifient les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} w_{uc} < S \\ w_{uc} - partUCInit \in [S_2, S_3[ \end{cases}$$

Nous notons la PM en euros totale éligible à ce type de bonus  $PM_{B_2}$ .

---

3. (définie dans la section 2.2.3.2)

- **Les contrats éligibles au Bonus  $B_3$  uniquement** sont les contrats qui vérifient les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} w_{uc} < S \\ (w_{uc} - partUCInit) \geq S_3 \end{cases}$$

Nous notons la PM en euros totale éligible à ce type de bonus  $PM_{B_3}$ .

- **Les contrats éligibles au Bonus  $B_S$  uniquement** sont les contrats qui vérifient les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} w_{uc} \geq S \\ (w_{uc} - partUCInit) < S_1 \end{cases}$$

Nous notons la PM en euros totale éligible à ce type de bonus  $PM_{B_S}$ .

- **Les passagers clandestins** (*éligible à  $B_S$  uniquement*) :

Les passagers clandestins sont les assurés qui bénéficient du bonus  $B_S$  sans faire un effort d'arbitrage dans le sens «Euros vers UC ». Ces contrats vérifient les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} w_{uc} \geq S \\ (w_{uc} - partUCInit) \leq 0 \end{cases}$$

Nous notons la PM en euros totale éligible à ce type d'assurés  $PM_{pc}$ .

- **les éligibles au bonus  $B_S$  uniquement** (*hors passagers clandestins*) :

Les passagers non clandestins sont les assurés qui bénéficient du bonus  $B_S$  en effectuant un effort d'arbitrage dans le sens «Euros vers UC ». Ces contrats vérifient les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} w_{uc} \geq S \\ 0 < (w_{uc} - partUCInit) < S_1 \end{cases}$$

Nous notons la PM en euros totale éligible à ce type d'assurés  $PM_{npc}$ .

Notons que  $PM_{B_S} = PM_{pc} + PM_{npc}$ .

- **Les contrats éligibles au Bonus  $B_1 + B_S$  uniquement** sont les contrats qui vérifient les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} w_{uc} \geq S \\ w_{uc} - partUCInit \in [S_1, S_2[ \end{cases}$$

Nous notons la PM en euros totale éligible à ce type de bonus  $PM_{B_1+B_S}$ .

- **Les contrats éligibles au Bonus  $B_2+B_S$  uniquement** sont les contrats qui vérifient les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} w_{uc} \geq S \\ w_{uc} - partUCInit \in [S_2, S_3[ \end{cases}$$

Nous notons la PM en euros totale éligible à ce type de bonus  $PM_{B_2+B_S}$ .

- **Les contrats éligibles au Bonus  $B_3+B_S$  uniquement** sont les contrats qui vérifient les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} w_{uc} \geq S \\ (w_{uc} - partUCInit) \geq S_3 \end{cases}$$

Nous notons la PM en euros totale éligible à ce type de bonus  $PM_{B_3+B_S}$ .

### 3.1.4.1 Calcul du bonus optimal

Nous avons effectué plusieurs optimisations en utilisant différentes contraintes à chaque fois, nous présentons ci-dessous les plus pertinentes.

Le tableau 3.13 ci-dessous présente les valeurs initiales ainsi que les bornes inférieures et supérieures des paramètres optimisés. Dans une optimisation, le choix des valeurs initiales est très important. En effet, le choix d'une bonne approximation initiale conditionne la convergence ou pas à la solution. Nous avons donc initialiser les bonus de variation UC et de seuil absolu en utilisant les résultats obtenus lors de l'optimisation avec deux seuils de bonifications (un seuil de variation UC et un seuil absolu, voir section 3.1.3.1).

Paramètres	Initialisation	Borne inférieure	Borne supérieure
$S_1$	10 %	0 %	100 %
$S_2$	20 %	0 %	100 %
$S_3$	30 %	0 %	100 %
$Seuil_{Absolu}$	30 %	0 %	100 %
$B_1$	1 bps	0 bps	100 bps
$B_2$	21.43 bps	0 bps	100 bps
$B_3$	42.86 bps	0 bps	100 bps
$B_S$	42.86 bps	0 bps	100 bps

**TABLE 3.13** – Paramètres d'initialisation de l'optimisation des bonus et seuils par strates

Dans un premier temps, nous avons effectué une optimisation, en ordonnant les seuils  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  de telle manière à représenter les tranches de la fonction objectif globale  $F_{L_{Euro}}$ .

### Calcul avec seuils ordonnés

Résultats	Valeurs des paramètres
$S_1$ optimal	9.98 %
$S_2$ optimal	19.76 %
$S_3$ optimal	29.75 %
$Seuil_{Absolu}$ optimal	28.84 %
Contrainte sur les seuils	$S_1 < S_2 < S_3$
$B_1$ optimal	48.83 bps
$B_2$ optimal	31.92 bps
$B_3$ optimal	100 bps
$B_S$ optimal	100 bps
$\mathbb{P}(w_{uc} \geq 30\%)$	95.19 %

**TABLE 3.14** – Résultats de l’optimisation des bonus et seuils par strates

D’après le tableau 3.14, nous remarquons que les bonus  $B_1$ ,  $B_2$  et  $B_3$  ne sont pas ordonnés. Ceci ne nous permet pas d’avoir une stratégie finale cohérente à présenter aux assurés. Comme expliqué dans la section 3.1.3.1, nous jugeons que le bonus devrait croître en fonction de l’effort demandé à l’assuré. Supposons par exemple que  $B_1 > B_2$ , les individus vont faire l’effort correspondant au bonus  $B_1$  et ne jamais faire l’effort (plus important, donc plus intéressant pour l’assureur) d’aller jusqu’au seuil du bonus  $B_2$ .

De plus, pour des raisons de cohérence commerciale avec les bonus proposés sur le marché, nous estimons que la somme des bonus ne devrait pas dépasser 100 *bps*. Nous fixons également les seuils de variations  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  et  $Seuil_{Absolu}$  pour des raisons de cohérence commerciale également. L’assureur en proposant cette solution à l’assuré, préfère communiquer un seuil  $S_1$  de 10% au lieu de 9.99% par exemple.

Calcul avec seuils et bonus ordonnés avec contrainte sur les bonus

Résultats	Valeurs des paramètres
$S_1$ (fixé)	10 %
$S_2$ (fixé)	20 %
$S_3$ (fixé)	30 %
$Seuil_{Absolu}$ (fixé)	30 %
$B_1$ optimal	11.8 bps
$B_2$ optimal	30 bps
$B_3$ optimal	49.1 bps
$B_S$ optimal	49.1 bps
Contrainte sur les bonus	$B_1 < B_2 < B_3$
Contrainte sur les bonus	$B_3 + B_S < 100 \text{ bps}$
$\mathbb{P}(w_{uc} \geq 30\%)$	88.8 %

**TABLE 3.15** – Résultats de l’optimisation des bonus et seuils par strates avec plusieurs contraintes

Le tableau 3.15 synthétise les résultats d’optimisation obtenus avec seuils fixés obtenus avec contrainte sur les bonus. Nous avons décidé d’utiliser des seuils fixés à fins de cohérence commerciale. De plus, la granularité que nous avons utilisé pour les poids  $w_{euro}$  est de l’ordre de  $10^{-2}$ . Nous pouvons donc arrondir les seuils obtenus à l’optimisation précédente et par la suite fixer les seuils. Les résultats du 3.15 seront retenus comme la solution de bonification proposée aux assurés.



### 3.1.4.2 Solution de bonification proposée aux assurés

Par la suite, nous appliquons à notre base de données le programme de revalorisation en utilisant les bonus du tableau 3.15. Les bonus déterminés seront servis en complément du taux servi aux assurés qui n'ont pas arbitré (ou qui n'ont pas suffisamment arbitré) pour être éligibles à une survalorisation. Nous présentons ci-dessous la solution proposée en arrondissant les bonus obtenus :

	Variation de la part en UC		
	$\geq 10\%$	Comprise entre 20% et 30%	$\geq 30\%$
Part UC < 30%	12 <i>bps</i>	30 <i>bps</i>	49 <i>bps</i>
Part UC $\geq 30\%$	61 <i>bps</i>	79 <i>bps</i>	98 <i>bps</i>

TABLE 3.16 – Forme de la solution de bonification proposée

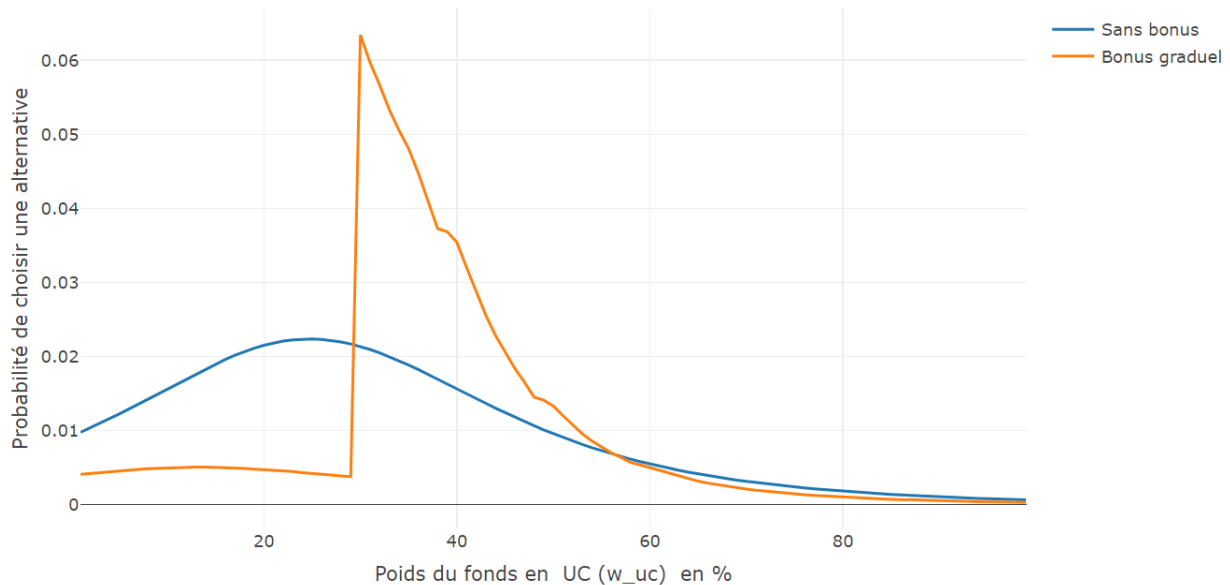
Celle-ci pourrait par exemple être formulée dans le cadre de communication aux assurés sous un format écrit plus explicite :

- Pour une **Part UC** < 30%
  - Bonus de 12 *bps* en complément du taux servi sur le fonds en euros pour une variation de la part en UC entre le 31/12/n et le 31/12/n-1 supérieure à 10%.
  - Bonus de 30 *bps* en complément du taux servi sur le fonds en euros pour une variation de la part en UC entre le 31/12/n et le 31/12/n-1 entre 20% et 30%.
  - Bonus de 49 *bps* en complément du taux servi sur le fonds en euros pour une variation de la part en UC entre le 31/12/n et le 31/12/n-1 supérieure ou égale à 30%.
- Pour une **Part UC**  $\geq 30\%$ 
  - Bonus de 61 *bps* en complément du taux servi sur le fonds en euros pour une variation de la part en UC entre le 31/12/n et le 31/12/n-1 supérieure 10%.
  - Bonus de 79 *bps* en complément du taux servi sur le fonds en euros pour une variation de la part en UC entre le 31/12/n et le 31/12/n-1 entre 20% et 30%.
  - Bonus de 98 *bps* en complément du taux servi sur le fonds en euros pour une variation de la part en UC entre le 31/12/n et le 31/12/n-1 supérieure ou égale 30%.

### 3.1.5 Distribution globale du portefeuille et taux servi moyen par produit

#### 3.1.5.1 Distribution globale du portefeuille

Nous avons agrégé les distributions  $Q_i$  à une distribution globale  $Q_G$ . Nous comparons la distribution dans le cas d'absence d'incitation au cas d'application du bonus graduel au portefeuille.



**FIGURE 3.7** – Distribution globale du portefeuille avec et sans incitation financière (fonction de masse)

D'après la figure 3.7 nous remarquons que l'alternative  $P(w_{uc} = 30\%)$  est l'alternative la plus probable. Elle correspond à un saut de la courbe de couleur orange. Nous remarquons également que le deuxième saut de la courbe correspond au point  $w_{uc} = 38\%$ . En effet, d'après le tableau 2.2 la part d'UC moyenne pondérée par les PM est de 28%. Le premier saut correspond au saut du seuil  $Seuil_{Absolu}$  qui est de 30%, le deuxième saut correspond à  $w_{uc} = 38\%$  qui est de  $28\% + S_1$ , le troisième saut correspond à  $48\% = 28\% + 20\%$  et le dernier saut est de  $58\% = 28\% + 30\%$ . Plus l'effort d'arbitrage demandé est grand, plus la probabilité que  $P(partInitUC + S_i)$  diminue. Par conséquent, il semble vraisemblable d'affirmer que si l'effort demandé en investissement en unités de compte est trop important, l'épargnant ne se montrera pas sensible à la campagne, d'où l'intérêt d'un programme stratifié.

### 3.1.5.2 Comparaison entre le cas déterministe et probabiliste

Nous avons calculé le poids optimal  $w_{uc}^*$  obtenu en maximisant l'utilité espérée (CRRA) pour une part en UC initiale moyenne de 28 % (puis de 30 %) et en appliquant les mêmes bonus obtenus que dans le cas de trois strates. Nous obtenons un poids optimal de  $w_{uc}^* = 30\%$  pour chacune des deux parts en UC moyennes de 28 % et de 30%.

Le programme de l'utilité espérée se présente comme suit :  $w_{uc}^* = \operatorname{argmax}_w E[U(R)]$

$$\text{Avec } E[U(R)] = \frac{1}{(1-\rho)\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (PM(1 + \tau_A)w + PM(1 - w) \max(0, 1 + z))^{1-\rho} \times e^{-\frac{z-\mu}{2\sigma^2}} dz$$

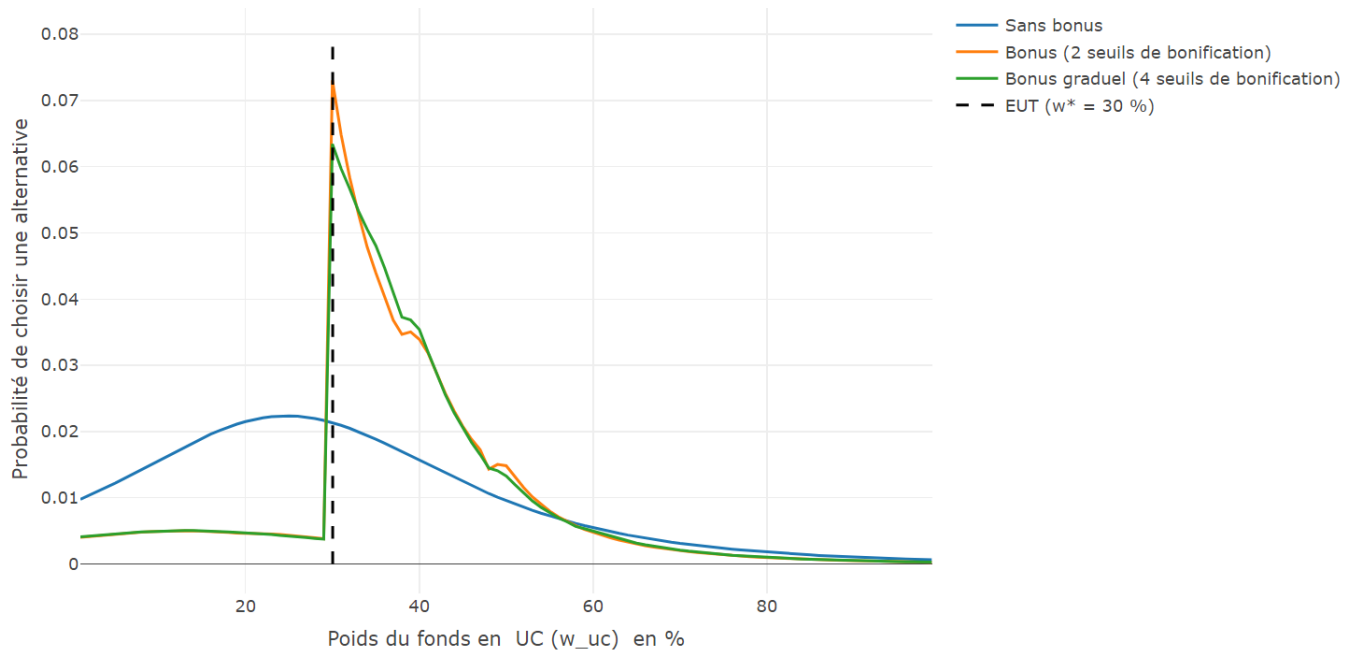
et  $Z$  le rendement du fonds en UC qui suit la loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ .

Pour pouvoir comparer entre le cas d'application de deux seuils et le cas de quatre seuils, nous avons recalculé les bonus correspondants au premier cas en utilisant la fonction objectif du programme stratifié. Nous obtenons les résultats suivants :

Résultats	Valeurs des paramètres
$S_2$ (fixé)	20 %
$Seuil_{Absolu}$ (fixé)	30 %
$B_2$ optimal	47 bps
$B_S$ optimal	47 bps
Contrainte sur les bonus	$B_2 + B_S < 100 \text{ bps}$
$\mathbb{P}(w_{uc} \geq 30\%)$	88.7 %

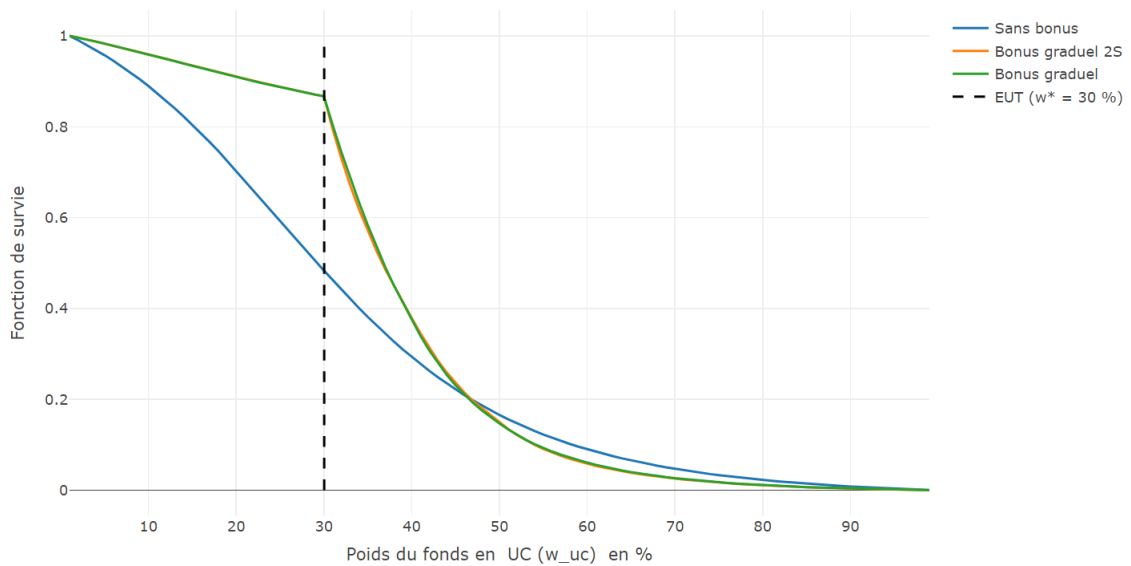
**TABLE 3.17** – Résultats de l'optimisation à deux seuils (en désactivant deux seuils de variations)

Sur le tableau 3.17, on observe que le bonus  $B_2$  qui correspond à un seuil de variation de 20% est plus élevé que le bonus  $B_2$  obtenu dans le cas d'activation de tous les bonus du programme stratifié 3.15. Quand on désactive les bonus  $B_1$  et  $B_3$ , l'assureur s'intéresse davantage à des variations de part en UC de 20% et le bonus correspondant à ce seuil augmente mécaniquement par rapport au cas où les trois bonus de variation seraient tous activés.



**FIGURE 3.8** – Comparaison entre le cas probabiliste et le cas déterministe (fonction de masse)

Sur le graphique 3.8, on observe que le cas  $w^* = 30\%$  correspond au mode de la distribution dans le cas d'application de deux seuils de bonification et dans le cas d'application de quatre seuils. Le cas déterministe revient à choisir l'alternative  $w_{uc}^* = 30\%$  avec une probabilité de 100 %. En appliquant le modèle de Blavatsky, la probabilité de choisir  $w_{uc}^* = 30\%$  n'est que de 7.3 % dans le cas d'application de deux seuils de bonification et vaut 6.34 % dans le cas d'application de trois seuils de bonification. Dans les deux, l'alternative la plus probable (au sens du choix) est  $w_{uc}^* = 30\%$  qui correspond au poids optimal obtenu par maximisation de l'utilité espérée. Cependant, le modèle probabiliste de Blavatsky est moins restrictif que le cas de la maximisation de l'utilité espérée puisqu'il permet de prendre en considération les autres alternatives.



**FIGURE 3.9** – Comparaison entre le cas probabiliste et le cas déterministe (fonction de survie)

D’après la figure 3.9, la fonction objectif obtenue après l’application des deux programmes au portefeuille est de 86.7%. Bien que le résultat des deux programmes soit similaire pour ce cas de figure, les deux programmes n’approchent pas de la même manière le portefeuille des assurés. En effet, le pouvoir incitatif du programme à trois seuils de variation de part en UC permet d’approcher différents types d’assurés selon leur variation de part en UC. L’assureur réaliser un compromis entre la complexité du choix des seuils et son objectif.

### 3.1.5.3 Taux servi moyen par produit

L’attribution de bonification requiert une réallocation des masses financières attribuées à la participation aux bénéfices (discrétionnaire). Il convient dans ce cadre de mesurer l’incidence de cette politique d’incitation, ainsi que son intégration dans la refonte de la politique de taux servi. Nous calculons dans cette partie le taux servi par l’assureur pour chaque produit tout en respectant le critère de PB réglementaire. Le tableau suivant 3.18 présente les résultats obtenus.

Produit ( $k$ )	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
$PM_{NB}$	17.7 %	11.6 %	19.6 %	16.6 %	28.5 %	15.6 %
$PM_{B_1}$	0.9 %	1.1 %	1 %	1.1 %	1.6 %	0.7 %
$PM_{B_2}$	0.3 %	0.5 %	0.3 %	0.4 %	0.3 %	0.4%
$PM_{B_3}$	0	0	0	0	0	0
$PM_{B_S}$	32.2 %	26.9 %	31.3 %	32 %	40.5 %	35.2 %
$PM_{B_{pc}}$	19.2 %	18.8 %	20.4 %	23.1 %	30.2 %	22.1 %
$PM_{B_{npc}}$	13 %	8.1 %	10.9 %	9 %	10.3 %	13.2 %
$PM_{B_1+B_S}$	16 %	12.9 %	16.3 %	14 %	10.2 %	15.8 %
$PM_{B_2+B_S}$	16.4 %	19 %	17.2 %	17.5 %	12 %	14.5 %
$PM_{B_3+B_S}$	16.5 %	28 %	14.3%	18.4 %	6.9 %	17.8 %
Taux servi attendu ( $\tau_A$ )	2.04 %	1.56 %	2.19 %	2.01 %	2.43 %	1.78 %
Taux servi ( $\tau_0$ )	1.76 %	1.12 %	1.97 %	1.66 %	1.94 %	1.4 %

**TABLE 3.18** – Ventilation des PM en euros éligibles aux bonus rapportées à la PM totale en euros attendue par produit

Le tableau 3.18 présente les parts de la PM totale en euros éligible aux bonus rapportées à la PM totale en euros attendue pour chaque produit. Par exemple, pour le produit 1, les assurés qui n'arbitrent pas assez (ou qui n'arbitrent pas) pour percevoir les bonus représentent 17.7% de la PM totale en euros attendue du produit 1.

D'après le tableau 3.18, il est possible de dresser les conclusions suivantes :

- Une revalorisation d'une partie assez importante de passagers clandestins qui bénéficient du bonus  $B_S$  sans effort d'arbitrage.
- Fixer un seuil d'éligibilité aux bonus plus bas conduirait à revaloriser une partie importante de passagers clandestins.
- Fixer un seuil d'éligibilité trop élevé ne permettra pas d'inciter efficacement une partie importante du portefeuille.
- Le taux servi  $\tau_0$  pour le produit 5 reste relativement élevé. Ceci est dû aux TMG assez élevés qui caractérisent les contrats de ce produit.
- Le taux servi  $\tau_0$  dépend du poids de la PM non bonifiée  $PM_{NB}$ . Le taux servi est croissant en cette grandeur.
- Nous remarquons également que  $PM_{B_3}$  est nulle pour tout produit. Nous rappelons qu'elle correspond au cas où l'assuré encaisse uniquement le bonus  $B_3$ . Le bonus  $B_3$  correspond au seuil de variation  $S_3$  qui est égal au  $Seuil_{Absolu}$ . L'assuré est éligible aux deux bonus dans le cas où il fait varier sa part en UC de  $S_3$  au moins.

Après avoir calculé les PM en euros attendus de chaque produit, nous calculons le taux final servi aux assurés  $\tau_f$  ( $\tau_f = \tau_0 + Bonus$ ) par produit et par type de bonus. Le tableau 3.19 présente les taux servis finaux par produit et par type de bonus.

Taux final servi $\tau_f$ ( $\tau_f = \tau_0 + Bonus$ )	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
$\tau_f = \tau_0 + B_1$	1.88 %	1.24 %	2.09 %	1.78 %	2.06 %	1.31 %
$\tau_f = \tau_0 + B_2$	2.06 %	1.42 %	2.27 %	1.96 %	2.24 %	1.49 %
$\tau_f = \tau_0 + B_3$	2.25 %	1.61 %	2.46 %	2.15 %	2.43 %	1.68 %
$\tau_f = \tau_0 + B_S$	2.25 %	1.61 %	2.46 %	2.15 %	2.43 %	1.68 %
$\tau_f = \tau_0 + B_1 + B_S$	2.37 %	1.73 %	2.58 %	2.27 %	2.55 %	1.80 %
$\tau_f = \tau_0 + B_2 + B_S$	2.55 %	1.91 %	2.76 %	2.45 %	2.73 %	1.98 %
$\tau_f = \tau_0 + B_3 + B_S$	2.74 %	2.10 %	2.95 %	2.64 %	2.92 %	2.17 %
Taux servi attendu ( $\tau_A$ )	2.04 %	1.56 %	2.19 %	2.01 %	2.43 %	1.78 %
Taux servi ( $\tau_0$ )	1.76 %	1.12 %	1.97 %	1.66 %	1.94 %	1.19 %
Taux servi moyen par produit	2.31 %	1.76 %	2.5 %	2.22 %	2.37 %	1.75 %

**TABLE 3.19** – Taux final servi par produit

Les bonus sont donc servis en complément de  $\tau_0$  aux assurés selon leur éligibilité aux bonus. D'après le tableau 3.19, on remarque que le taux servi moyen par produit augmente par rapport au taux servi attendu  $\tau_A$  sauf pour les catégories 5 et 6. Le taux servi moyen par produit dépend du poids des PM éligibles aux bonus et du budget alloué à la PB pour chaque produit. Le taux servi moyen par produit augmente (par rapport au taux servi attendu) quand le budget alloué à la PB permet de servir les bonus au-delà du taux servi attendu  $\tau_A$ . Pour tous les produits, la PM arbitrée vers les fonds en UC augmente et donc la PM en euros attendue diminue.

Le tableau suivant 3.20 quantifie les écarts entre le cas d'application et de non application de l'incitation financière.

Produit ( $k$ )	$PM_{arbitrée_{Inci}}^{euro \rightarrow UC}$	$PM_{arbitrée}^{euro \rightarrow UC}$	Écart absolu <sup>4</sup>	Écart relatif <sup>5</sup>
$k = 1$	304.8	63	241.8	380 %
$k = 2$	360.6	258.6	102	40 %
$k = 3$	144.2	7.4	136.8	1840 %
$k = 4$	70.4	11.6	58.7	510 %
$k = 5$	-17	-36.05	19	50 %
$k = 6$	10.9	4.4	6.5	150 %

**TABLE 3.20** – Écart entre les cas avec et sans incitation en M €

D'après le tableau 3.20, nous constatons que grâce à l'incitation financière, la PM arbitrée dans le sens euro UC augmente considérablement. L'effet attendu d'un arbitrage vers les UC est retrouvé dans tous les produits sauf le produit 5. En effet, le produit est caractérisé par des TMG très élevés. L'effort demandé à l'assuré est très important dans ce cas, et les bonus

4. Nous avons calculé l'écart absolu entre le cas avec incitation  $a$  et le cas sans incitation  $b$  comme suit :  $|a - b|$

5. Nous avons calculé l'écart relatif entre le cas avec incitation  $a$  et le cas sans incitation  $b$  comme suit :  $\frac{a-b}{|b|}$

proposés ne permettent pas de compenser totalement les rendements générés par le fonds en euros. Cependant, il est important de noter que l'effet de l'incitation est considérable, dans la mesure où les assurés allaient arbitrer 36.05 M € dans le cas de l'absence de l'incitation. Dans le cas, où on applique l'incitation financière ce volume est quasiment divisé par deux, et les assurés arbitrent 17.02 M € au lieu de 36.02 M €.

Les écarts absolus entre les PM arbitrés vers les fonds en UC dans les deux cas, constitue des gains pour l'assureur qui souhaite réorienter un maximum de fonds en euros vers les fonds en UC. Pour le produit 5, l'assureur gagne 19.03 M € qui restent investis en fonds en UC. Nous pouvons conclure, que la politique d'incitation financière a également des effets de désincitation d'arbitrer vers les fonds en euros. En effet, les deux effets sont équivalents. L'assureur pour maximiser la part d'UC globale, il peut inciter les assurés à investir davantage en fonds en UC ou les désinciter à investir davantage dans les fonds en euros.

## 3.2 Combinaison de la solution proposée avec d'autres incitations financières

### 3.2.1 Différenciation des frais

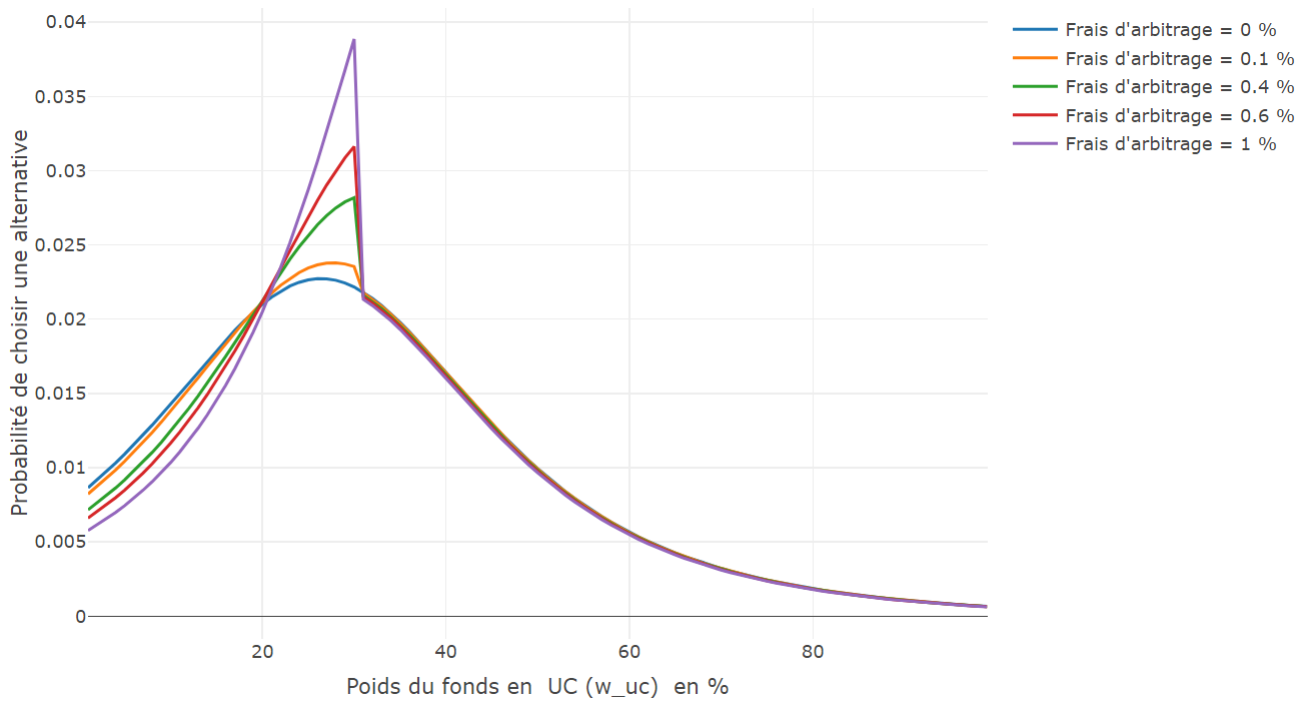
#### 3.2.1.1 Étude de la sensibilité de la distribution par rapport aux frais d'arbitrage

Nous appliquons des frais sur la partie de la PM arbitrée dans le sens UC vers euros. Le but étant de détecter l'effet de la contrainte sur les frais d'arbitrage, nous désactivons dans un premier temps les bonus sur rendement. Ensuite, nous appliquons le modèle de choix en utilisant différentes valeurs de frais d'arbitrage. Pour calculer ces sensibilités nous avons fixé certains paramètres. Ces paramètres se présentent comme suit :

Type de paramètre	Valeur du paramètre
Type du fonds	A
$\mu$	3,05 %
$\sigma$	9,06 %
Provision mathématique	1
Taux servi	1,93 %
TMG	0.0698 %
Nombre de simulation ( $n_{sim}$ )	10000
Nombre d'itérations ( $N_{iter}$ )	50
Nombre de simulation ( $n_{sim}$ )	10000
Part UC initiale	30 %
$\rho$	6.06
$\lambda$	4.88
Frais	{0%, 0.1%, 0.4%, 0.6%, 1%}

TABLE 3.21 – Paramètres fixés pour le calcul des sensibilités par rapport aux frais





**FIGURE 3.10** – Sensibilité par rapport à des variations des frais d’arbitrage (fonction de masse)

Nous remarquons à travers la figure 3.10 que plus les frais d’arbitrages augmentent plus la probabilité  $P(w_{uc} = 30\%)$  augmente. Nous rappelons que les frais d’arbitrages sont appliqués à la PM arbitrée dans le sens UC vers euros dans le but de désinciter les assurés à arbitrer vers les fonds en euros. La part initiale de fonds en UC de l’assuré est de 30%, il est donc plus probable que l’assuré reste à sa composition initiale en fonds en UC et en euros que d’arbitrer dans le sens UC vers euros. Les frais d’arbitrage ont donc principalement un effet de désincitation à la réorientation de l’épargne en UC vers les euros.

### 3.2.2 Différenciation des frais et bonus

Considérons que nous avons activé un seul bonus de variation et le bonus de seuil pour étudier l'effet des frais d'arbitrage.

Type de paramètre	Valeur du paramètre
Type du fonds	A
$\mu$	3,05 %
$\sigma$	9,06 %
Provision mathématique	1
Taux servi	1,93 %
TMG	0.0698 %
Nombre de simulation ( $n_{sim}$ )	10000
Nombre d'itérations ( $N_{iter}$ )	50
Nombre de simulation ( $n_{sim}$ )	10000
Part UC initiale	30 %
$\rho$	6.06
$\lambda$	4.88
Frais	{0%, 0.1%, 0.4%, 0.6%, 1%}
$Seuil_{Variation}$	10%
Bonus $B_1$	10 bps
$Seuil_{Absolu}$	40%
Bonus $B_S$	10 bps

TABLE 3.22 – Paramètres fixés pour le calcul des sensibilités par rapport aux frais

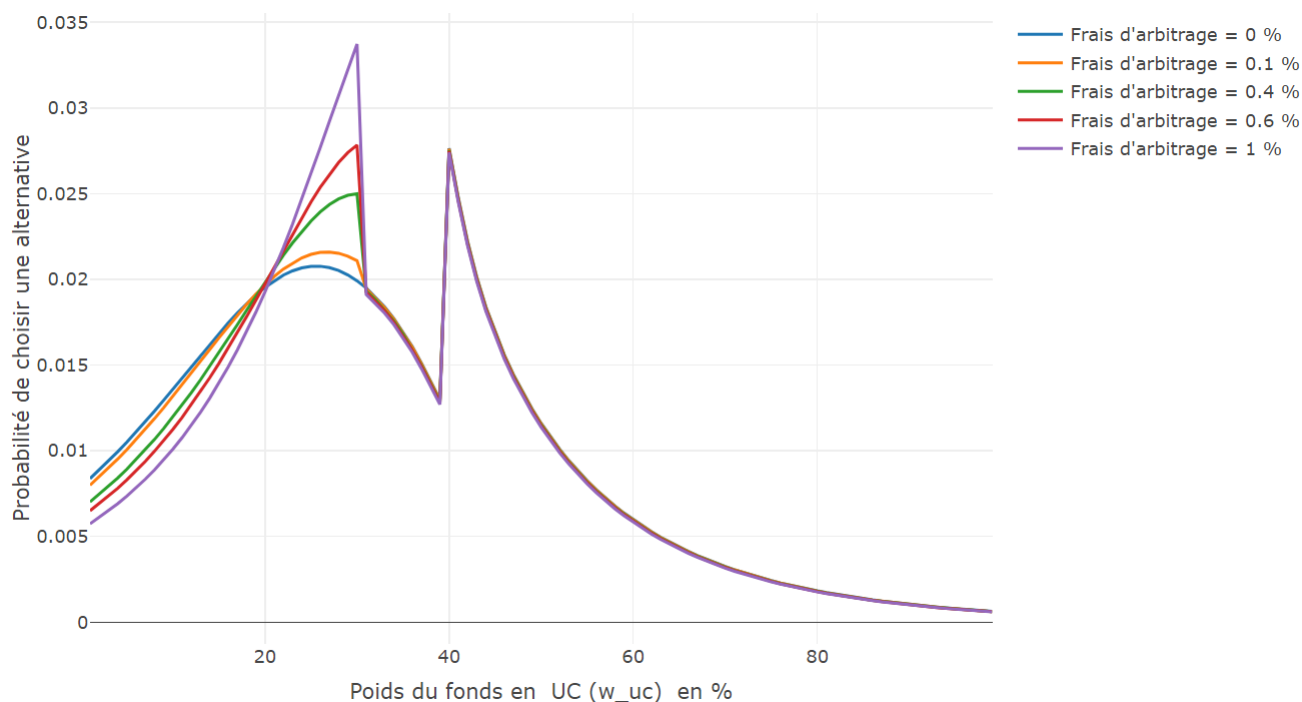
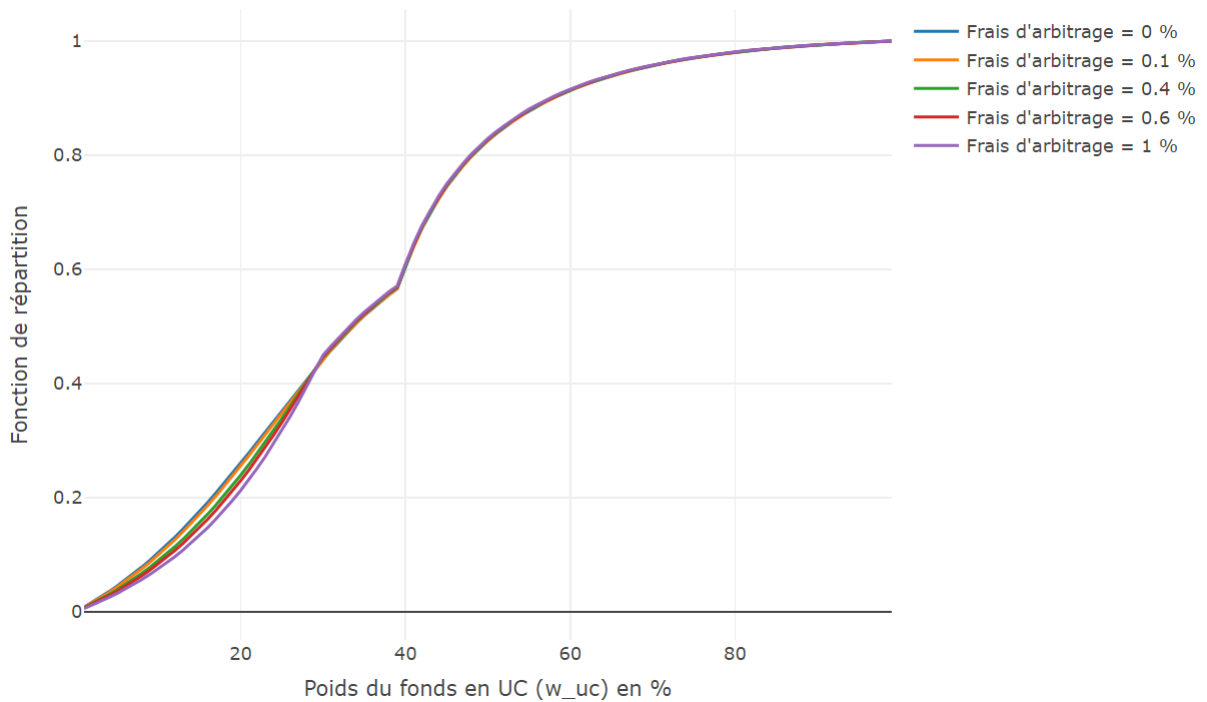


FIGURE 3.11 – Sensibilité par rapport à des variations du seuil absolu (fonction de masse)

On observe sur le graphique 3.11 que la probabilité  $P(w_{uc} = 30\%)$  est croissante en les frais d'arbitrage. En effet, plus on augmente les frais d'arbitrage plus on désincite l'assuré à investir en fonds en euros.



**FIGURE 3.12** – Sensibilité par rapport à des variations du seuil absolu (Fonction de répartition)

D'après les figures 3.11 et 3.12, nous remarquons qu'en combinant les frais d'arbitrage avec un seuil de variation UC et un seuil absolu, la probabilité que l'assuré (dont la part initiale est de 30%) arbitre vers le fonds en UC augmente. Cet effet est la conséquence de la désincitation des assurés à arbitrer vers les fonds en euros grâce aux frais d'arbitrage. Cependant, à travers la fonction de répartition (3.12), nous constatons que cet effet demeure faible par rapport à une campagne d'incitation basée sur la bonification de l'effort d'arbitrage vers les unités de compte.

### 3.2.2.1 Calcul du bonus optimal dans le cas d'application des frais d'arbitrage

Nous calculons les bonus optimaux en utilisant les mêmes paramètres d'initialisation présentés dans le tableau 3.13. Nous fixons les seuils  $\{S_1, S_2, S_3, S_{Absolu}\} = \{10\%, 20\%, 30\%, 30\%\}$  et les frais d'arbitrages à 0.6%. Le tableau suivant présente les résultats obtenus.

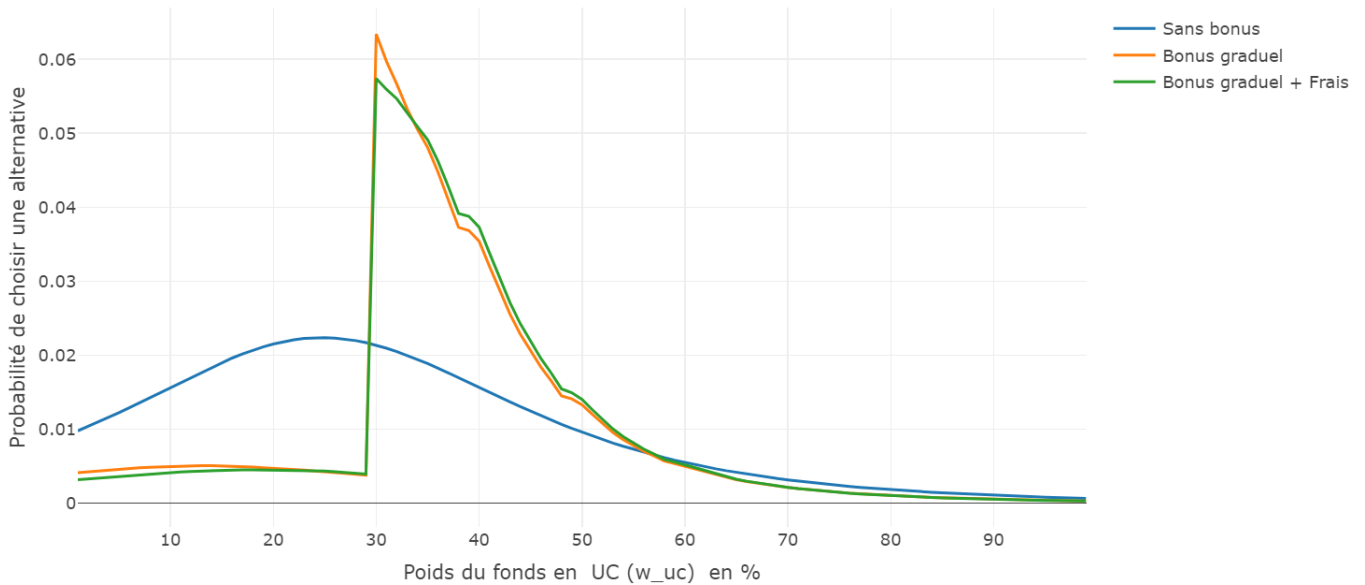
Résultats	Valeurs des paramètres
$S_1$ (fixé)	10 %
$S_2$ (fixé)	20 %
$S_3$ (fixé)	30 %
$Seuil_{Absolu}$ (fixé)	30 %
$B_1$ optimal	11.8 bps
$B_2$ optimal	30 bps
$B_3$ optimal	49.1 bps
$B_S$ optimal	49.1 bps
$\mathbb{P}(w_{uc} \geq 30\%)$	88.9 %

**TABLE 3.23** – Résultats de l'optimisation des bonus et seuils par strates avec frais d'arbitrage

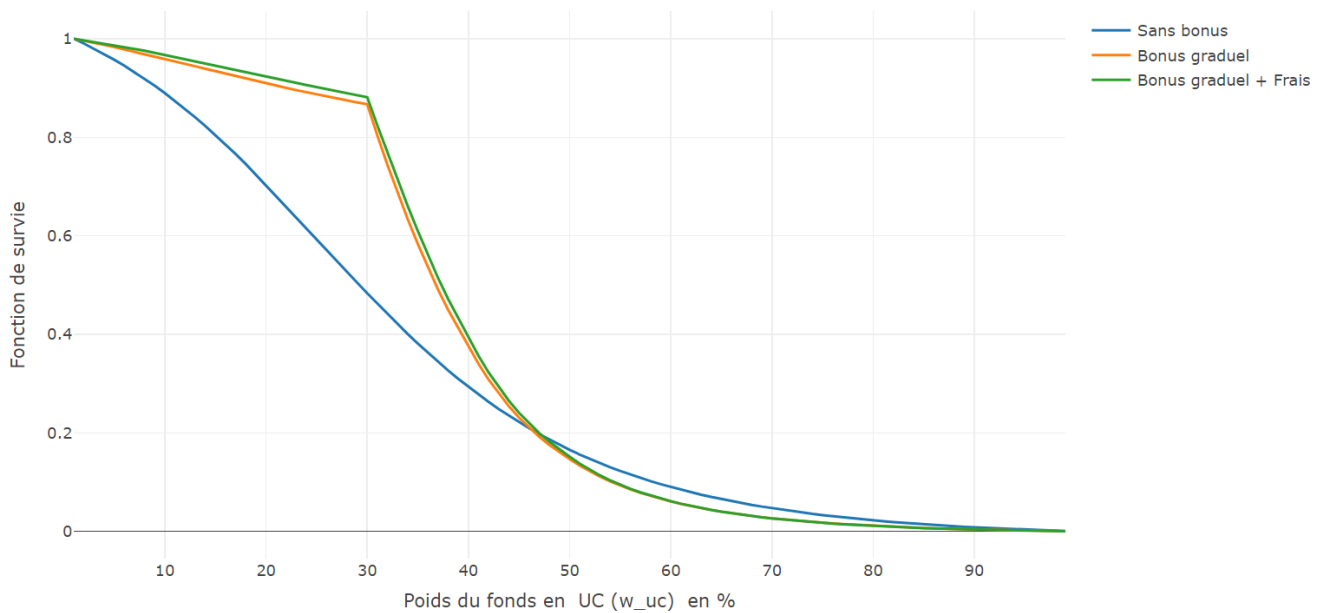
D'après le tableau 3.23, dans le cas d'application de frais d'arbitrages de 0.6%, nous remarquons que les bonus optimaux obtenus sont les mêmes que dans le cas de non application des frais d'arbitrage. Cependant la fonction objectif  $P(w_{uc} \geq 30\%)$  passe de 88.8% à 88.9%. À bonus égal, la probabilité que les assurés détiennent une part en UC au moins égale à 30% augmente de 10 bps. L'écart relatif entre les fonctions objectif dans le cas d'application d'une politique d'incitation sans frais et avec frais n'est que de 0.1 %. L'ajout d'une contrainte de frais sur les arbitrages UC vers euros pénalise ces arbitrages et permet aux assureurs d'augmenter légèrement les assurés qui détiennent au moins 30% de fonds en UC. Ceci est un effet attendu, nous avons remarqué que dans l'analyse d'un seul assuré sans appliquer de bonus, le fait de pénaliser l'arbitrage dans le sens UC vers euros permet d'augmenter la probabilité que l'assuré n'arbitre pas dans ce sens. Cependant, l'effet d'ajout d'une contrainte sur les frais n'est pas totalement équivalent aux bonus dans ce cas et demeure faible.

### 3.2.2.2 Distribution globale du portefeuille

Nous comparons les distributions globales après application du programme au portefeuille avec et sans frais d'arbitrage .



**FIGURE 3.13** – Distribution globale du portefeuille (fonction de masse)



**FIGURE 3.14** – Distribution globale du portefeuille (fonction de survie)

Sur les graphiques 3.13 et 3.14, on observe qu'en combinant frais et bonus graduel, nous remarquons que par rapport à un bonus graduel uniquement, la probabilité que les gens arbitrent vers les fonds en euros diminue. La fonction objectif  $P(w_{uc} \geq 30\%)$  passe de 86.7% à 88.11% à bonus égal. Les frais d'arbitrage permettent à l'assureur d'augmenter la part d'UC globale du portefeuille après arbitrage à bonus égal. L'assureur peut donc chercher à appliquer

des frais équivalents aux bonus proposés pour maximiser sa proportion cible de fonds en UC. Cependant, les frais d'arbitrage font partie des critères de choix du contrat de l'assuré. Une augmentation excessive des frais d'arbitrage affecte négativement la compétitivité de l'assureur.

### 3.2.2.3 Taux servi moyen par produit

De manière similaire à la partie précédente nous calculons les taux servis  $\tau_0$  et les PM arbitrées dans ce cas de figure.

Produit ( $k$ )	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
Taux servi attendu ( $\tau_A$ )	2.04%	1.56%	2.19%	2.01%	2.43%	1.78%
Taux servi ( $\tau_0$ )	1.77%	1.13%	1.99%	1.68%	1.94%	1.41%

TABLE 3.24 – Taux servi par produit (bonus graduel + application de frais d'arbitrage)

Produit ( $k$ )	$PM_{arbitrée}^{euro \rightarrow UC} Inci_{Frais}$	$PM_{arbitrée}^{euro \rightarrow UC}$	Écart absolu	Écart relatif
$k = 1$	327.6	63	264.6	420 %
$k = 2$	374.6	258.6	116	45 %
$k = 3$	158.4	7.4	151	2041 %
$k = 4$	77.3	11.6	65.7	566 %
$k = 5$	-12.2	-36	23.8	66 %
$k = 6$	11.7	4.4	7.3	166 %

TABLE 3.25 – Écart entre les cas avec et sans incitation en M €

D'après les tableaux 3.24 et 3.25, nous remarquons que les taux servis  $\tau_0$  sont légèrement supérieurs aux taux servis dans le cas de l'application d'un bonus graduel sans frais d'arbitrage (dans le sens UC vers euros). Ceci peut être expliqué par le fait que les frais d'arbitrage jouent un rôle désincitatif au réinvestissement vers le fonds en euros, au même titre que les bonus correspondant aux  $Seuil_{variation}$ . En effet, récompenser les assurés pour réorienter leur épargne vers les fonds en UC est équivalent à les sanctionner s'ils arbitrent vers les fonds en euros. On observe également l'augmentation de la PM arbitrée du fonds en euros vers le fonds en UC par rapport au cas de non application de frais d'arbitrage. La PM totale en euros attendue diminue et par conséquent le  $\tau_0$  augmente légèrement. Cependant, dans ce cas de figure l'effet de l'ajout d'une condition sur les frais d'arbitrage est faible. Les taux servis obtenus dans le cas d'application des frais sont très proches du cas de non application des frais d'arbitrage. L'ajout d'une contrainte sur les frais pourrait accorder à l'assureur un degré de liberté supplémentaire en calculant des frais équivalents à l'application d'un bonus sur rendement. Cette contrainte est pertinente dans le cas où l'objectif de l'assureur serait de bloquer les arbitrages UC vers euros.

### 3.2.3 Contrainte sur l'encours

Nous pouvons également considérer une contrainte sur l'encours. En plus, des contraintes sur la part en UC finale et la variation en UC, l'assuré doit vérifier une condition d'encours pour avoir accès au bonus. L'effet attendu d'une condition sur l'encours des assurés est une diminution de la valeur de la fonction objectif car l'assureur restreint l'ensemble des arbitrages possibles.

#### 3.2.3.1 Sensibilité de la distribution globale à la contrainte sur l'encours

Nous calculons les bonus optimaux en utilisant les mêmes paramètres d'initialisation présentés dans le tableau 3.13. Nous fixons les seuils  $\{S_1, S_2, S_3, S_{Absolu}\} = \{10\%, 20\%, 30\%, 30\%\}$  et des seuils sur l'encours  $\{250\,000\,€ , 100\,000\,€ , 50\,000\,€ \}$ . Du fait que notre indicateur de richesse de l'assuré est la  $PM$  totale, une condition sur l'encours veut simplement dire que l'assuré n'encaisse le bonus que s'il détient au moins le seuil sur l'encours et nous appliquons le programme de l'assureur obtenu pour chacun des seuils encours ci-dessus. En utilisant, le même raisonnement dans les sections précédentes nous recalculons les bonus optimaux dans le cas d'une contrainte sur l'encours. Les résultats de l'optimisation sont présentés dans le tableau 3.26.

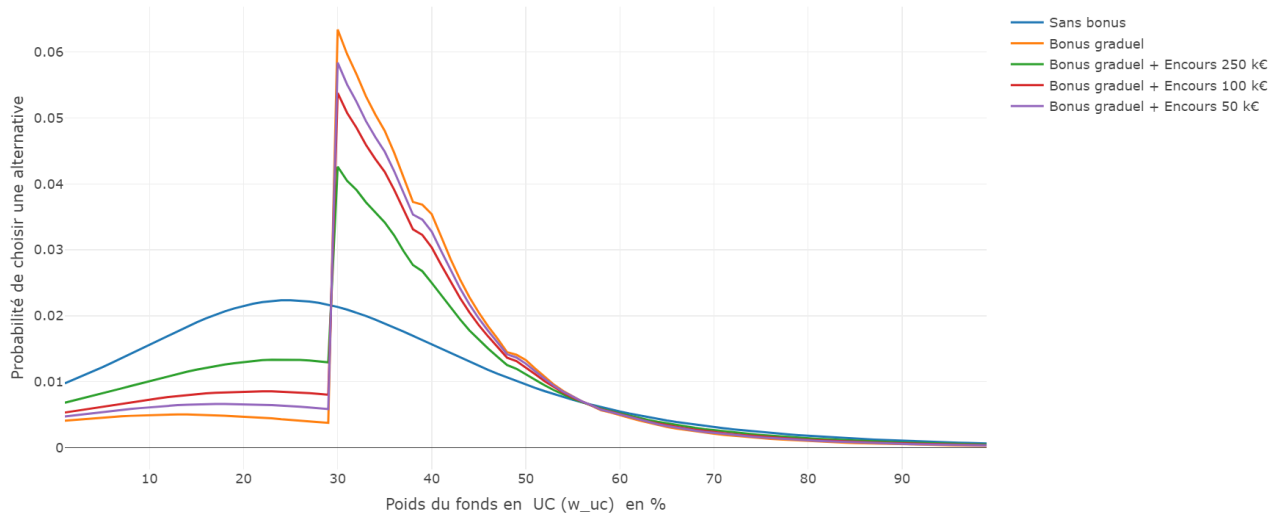
Résultats	Valeurs des paramètres		
Seuil encours	250 000 €	100 000 €	50 000 €
$S_1$ (fixé)	10%	10%	10%
$S_2$ (fixé)	20%	20%	20%
$S_3$ (fixé)	30%	30%	30%
$Seuil_{Absolu}$ (fixé)	30%	30%	30%
$B_1$ optimal	11.8 bps	11.8 bps	11.8 bps
$B_2$ optimal	30 bps	30 bps	30 bps
$B_3$ optimal	49.1 bps	49.1 bps	49.1 bps
$B_S$ optimal	49.1 bps	49.1 bps	49.1 bps
$\mathbb{P}(w_{uc} \geq 30\%)$	67.8 %	78.03 %	82.4 %

**TABLE 3.26** – Résultats de l'optimisation des bonus et seuils par strates avec frais d'arbitrage

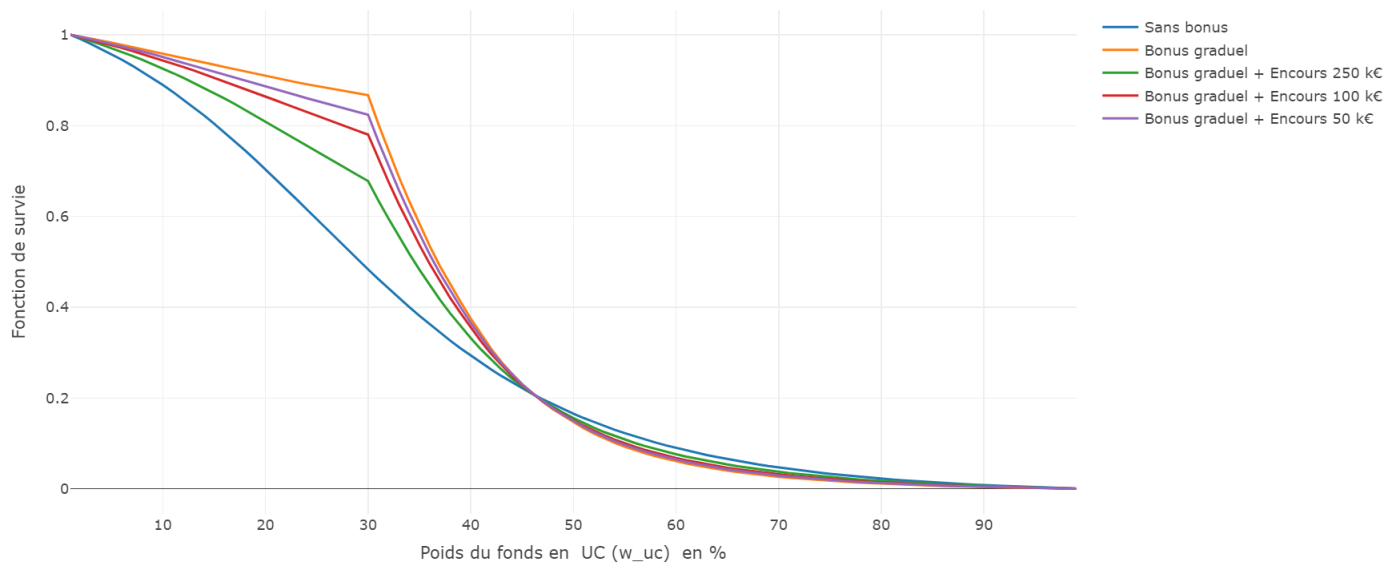
Sur le tableau 3.26 on observe que les bonus obtenus sont les mêmes que dans le cas de non application d'une contrainte sur l'encours. Ceci est expliqué par le lien faible entre la  $PM$  et la part en UC que nous avons explicité dans la partie précédente.

Dans le cas de l'application d'une contrainte sur l'encours, nous observons une baisse de la fonction objectif  $P(w_{uc} \geq 30\%)$  par rapport au cas de bonification sans condition sur l'encours. De plus, nous constatons que la fonction objectif est décroissante en la contrainte sur l'encours. Ceci est expliqué par le fait, que les contraintes sur l'encours excluent plusieurs assurés qui souhaitent arbitrer potentiellement (sous condition d'encaisser le bonus en complément du

taux servi). Si le but de l'assureur était de maximiser le volume arbitré vers les fonds en UC, une condition sur l'encours peut être très intéressante. Cependant, dans notre cas, l'objectif de l'assureur est de maximiser la probabilité que la part d'UC globale soit supérieure ou égale à 30% de fonds en UC.



**FIGURE 3.15** – Sensibilité de la distribution globale à la contrainte sur l'encours (fonction de masse)



**FIGURE 3.16** – Sensibilité de la distribution globale à la contrainte sur l'encours (fonction de survie)

On observe sur les graphiques 3.15 et 3.16 la relation décroissante entre la fonction objectif et la contrainte sur l'encours. Nous remarquons également que les courbes se rapprochent de la courbe bleue (sans contrainte sur l'encours) au fur et à mesure que la contrainte sur l'encours diminue. Il est évident que si la contrainte sur l'encours est égale à la PM minimale du portefeuille les courbes avec encours coïncide avec la courbe bleue.



### 3.2.3.2 Taux servi moyen par produit

De manière similaire à la partie précédente nous calculons les taux servis  $\tau_0$  et les PM arbitrées dans ce cas de figure.

Produit ( $k$ )	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
$PM_{NB}$	44.8%	31.3%	31.2%	21.9%	47.6%	49.9%
$PM_{B_1}$	3.5%	5%	1.8%	1.8%	3.4%	3.8%
$PM_{B_2}$	1.1%	1.7%	0.4%	0.6%	0.7%	1.6%
$PM_{B_3}$	0%	0%	0%	0%	0%	0%
$PM_{B_S}$	18.8%	18.8%	25.2%	29.3%	27.6%	18.2%
$PM_{B_{pc}}$	10.9%	12.2%	16.2%	20.9%	20.2%	10.1%
$PM_{B_{npc}}$	7.8%	6.6%	9%	8.4%	7.5%	8%
$PM_{B_1+B_S}$	9.8%	9.8%	13.7%	13.1%	6.5%	8.7%
$PM_{B_2+B_S}$	10.2%	13%	14.7%	16.1%	8.6%	6.7%
$PM_{B_3+B_S}$	11.9%	20.4%	13%	17.3%	5.7%	11.2%
Taux servi attendu ( $\tau_A$ )	2.04%	1.56%	2.19%	2.01%	2.43%	1.78%
Taux servi ( $\tau_0$ )	1.76%	1.23%	1.95%	1.67%	1.90%	1.46%

**TABLE 3.27** – Ventilation des PM en euros éligibles aux bonus rapportées à la PM totale en euros attendue par produit (bonus graduel et contrainte sur l'encours)

Produit ( $k$ )	$PM_{arbitrée}^{euro \rightarrow UC}_{Inci_{Encours}}$	$PM_{arbitrée}^{euro \rightarrow UC}$	Écart absolu	Écart relatif
$k = 1$	148.1	63	85.1	135 %
$k = 2$	294.2	258.6	35.6	14 %
$k = 3$	107.5	7.4	100.1	1353%
$k = 4$	63.2	11.6	51.6	445%
$k = 5$	-26.7	-36	9.3	26%
$k = 6$	4.6	4.4	0.2	5%

**TABLE 3.28** – Écart entre les cas avec et sans incitation en M €

Nous rappelons que le taux servi  $\tau_0$  est défini comme la grandeur servie aux assurés qui n'ont pas suffisamment arbitré ou qui n'ont pas du tout arbitré. Ainsi,  $\tau_0$  dépend de deux grandeurs : le volume de la PM non bonifiée  $PM_{NB}$  et le volume des bonus. D'après le tableau 3.27, nous remarquons que les taux servis dans ce cas sont supérieurs aux taux servis dans le cas de l'application d'un bonus graduel sans contrainte sur l'encours pour les produits 2, 4 et 6. Ceci est expliqué par la diminution de la PM en euros éligible au bonus qui ne compense pas l'augmentation de la  $PM_{NB}$ . Dans le cadre d'application d'une contrainte sur l'encours le volume de la PM en euros éligible aux bonus diminue du fait de l'exclusion d'arbitrages potentiels. Pour les produits 5 et 3 la diminution du taux servi est expliqué par l'augmentation considérable de la PM totale en euros attendue par rapport au cas de non application sur l'encours. Pour le produit 1, l'augmentation de la part de la PM non bonifiée compense exactement la diminution des PM en euros éligibles au bonus et le taux servi ne change pas.

### 3.2.4 Différenciation des frais et contrainte sur l'encours

Nous combinons dans cette section les trois incitations financières.

#### 3.2.4.1 Calcul du bonus optimal

Nous calculons les bonus optimaux en utilisant les mêmes paramètres d'initialisation présentés dans le tableau 3.13. Nous fixons les seuils  $\{S_1, S_2, S_3, S_{Absolu}\} = \{10\%, 20\%, 30\%, 30\%\}$ , les frais d'arbitrage à 0.6% et le seuil encours à 250 000 €.

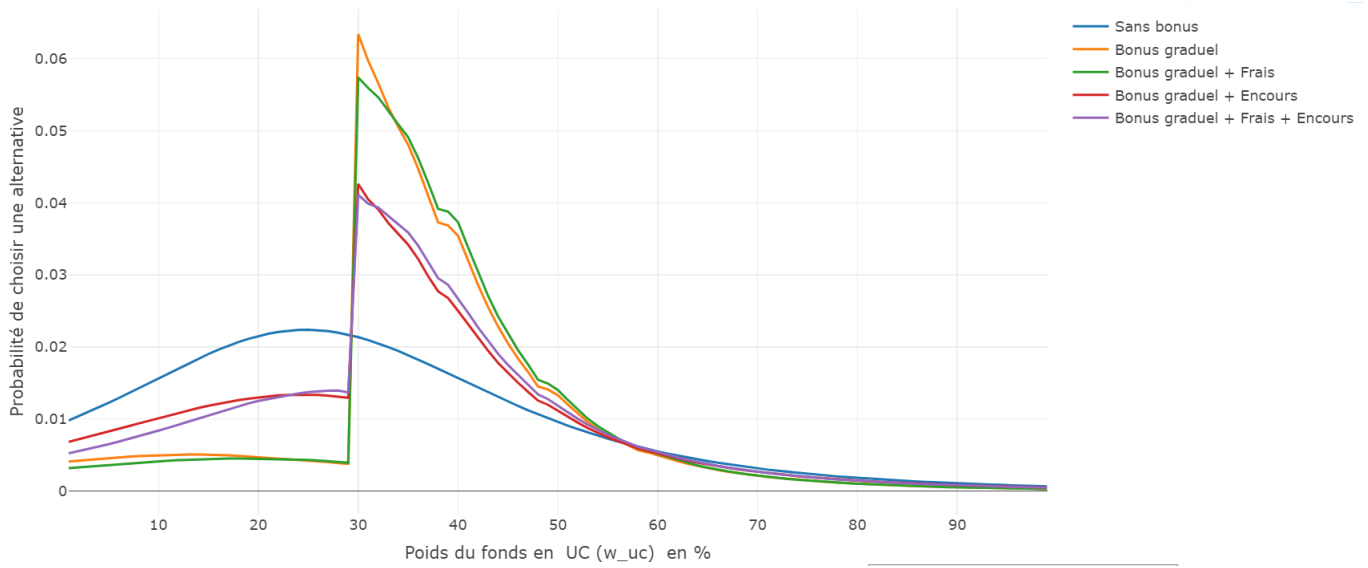
Résultats	Valeurs des paramètres
$S_1$ (fixé)	10 %
$S_2$ (fixé)	20 %
$S_3$ (fixé)	30 %
$Seuil_{Absolu}$ (fixé)	30 %
$B_1$ optimal	11.8 bps
$B_2$ optimal	30 bps
$B_3$ optimal	49.1 bps
$B_S$ optimal	49.1 bps
$\mathbb{P}(w_{uc} \geq 30\%)$	70.44 %

**TABLE 3.29** – Résultats de l'optimisation des bonus et seuils par strates avec frais d'arbitrage et contrainte sur l'encours

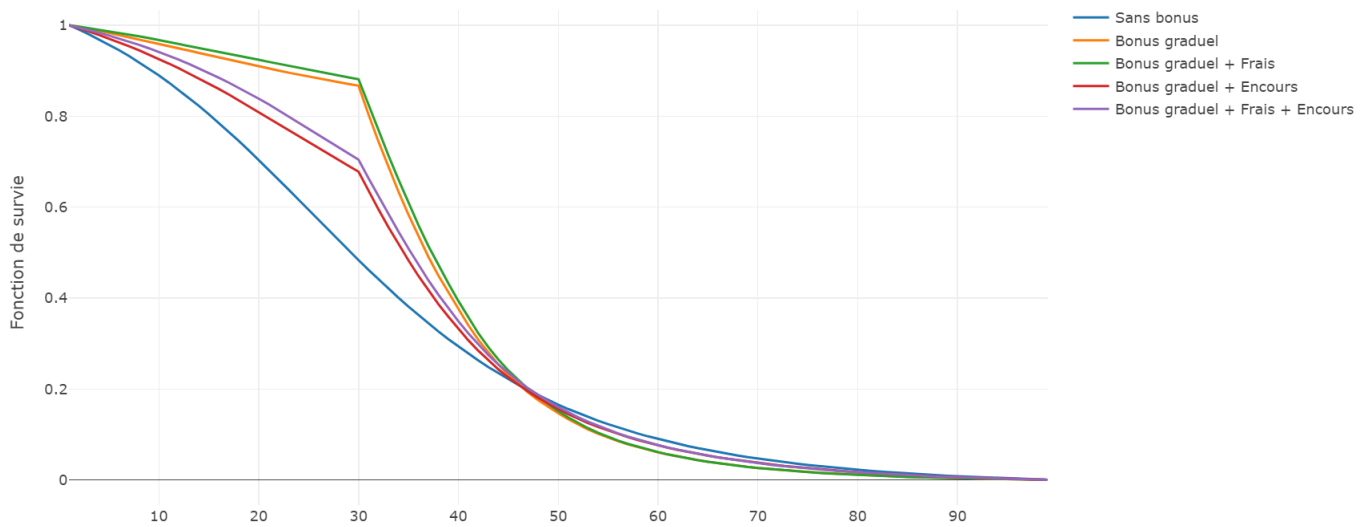
On observe sur le tableau 3.29 que les bonus optimaux sont les mêmes que dans le cas d'application d'un bonus graduel. Le fait de combiner les frais d'arbitrage avec la condition sur l'encours fait augmenter la fonction objectif de 2.64% par rapport au cas d'application de la contrainte sur l'encours. Ceci est un effet attendu, car nous avons expliqué qu'en appliquant des frais d'arbitrage au même programme, la fonction objectif augmente du fait de la désincitation à orienter l'épargne vers les fonds en euros.

### 3.2.4.2 Distribution globale du portefeuille

La figure 3.18 regroupe les distributions globales du portefeuille dans les quatre cas.



**FIGURE 3.17** – Distribution globale du portefeuille (fonction de masse)



**FIGURE 3.18** – Distribution globale du portefeuille (fonction de survie)

D'après la figure 3.18, nous constatons l'amélioration de la fonction objectif en appliquant les incitations financières par rapport au cas sans bonus. En combinant un bonus graduel aux frais d'arbitrage, la fonction objectif atteint une valeur maximale par rapport aux autres incitations.

### 3.2.4.3 Taux servi moyen par produit

De manière analogue aux études précédentes, nous calculons les taux servis  $\tau_0$  dans le cas d'une combinaison d'un bonus graduel, d'une contrainte sur l'encours et des frais d'arbitrage. Nous obtenons le résultat suivant :

Produit ( $k$ )	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
Taux servi attendu ( $\tau_A$ )	2.04%	1.56%	2.19%	2.01%	2.43%	1.78%
Taux servi ( $\tau_0$ )	1.78%	1.24%	1.97%	1.68%	1.91%	1.47%

**TABLE 3.30** – Taux servi par produit (bonus graduel + contrainte sur l'encours + application des frais d'arbitrage)

D'après le tableau 3.30, nous remarquons que les taux servis dans ce cas sont supérieurs aux taux servis dans le cas de l'application d'un bonus graduel avec contrainte sur l'encours sans frais d'arbitrage. Nous retrouvons l'effet faible de l'ajout d'une contrainte de frais d'arbitrage sur les PM arbitrées. Les taux servis augmentent légèrement de 0.01 %. Ceci est expliqué par la diminution de la PM en euros éligible aux bonus.

## 3.3 Alternatives au modèle retenu

### 3.3.1 Pistes d'améliorations

Dans tout ce mémoire, nous supposons que tous les assurés sont caractérisés par le même paramètre d'aversion au risque. Il serait plus réaliste de supposer que chaque individu a ses propres goûts par rapport au risque. Néanmoins, relaxer notre hypothèse d'uniformité de l'aversion au risque nécessiterait l'observation de plusieurs décisions d'investissement par assuré. Nous aurions pu estimer un paramètre d'aversion au risque par assuré si, par exemple, nous pouvions observer l'évolution du portefeuille de chaque assuré au fil de plusieurs années. Cependant, on pourrait s'appuyer sur l'allocation initiale entre fonds en euros et en UC comme proxy de l'aversion au risque.

Notre modèle est statique, il fait abstraction de toute considération dynamique. D'un côté, un assuré qui compte investir sur le long terme sera moins sensible aux mouvements actuels du marché et pourrait potentiellement réagir à nos incitations d'une manière différente de ce que prévoit notre modèle. D'un autre côté, l'objectif de l'assureur peut lui aussi être pluriannuel. Un assureur peut envisager une stratégie où il sacrifie des bénéfices pour une année pour en récupérer davantage l'année d'après. Notre modèle ne rend pas compte de ce type de comportements. Seulement, encore une fois, l'estimation de n'importe quel modèle dynamique nécessiterait des observations qui s'étalent sur un nombre suffisant d'années, nos données ne portent que sur l'exercice 2016.

Pour prédire la décision des assurés, nous avons besoin de connaître leurs anticipations, notamment en taux servi. Dans ce mémoire, nous avons simplement supposé que les assurés s'attendent au même taux servi que celui de l'exercice précédent. Ceci est grande une simplification de la réalité. Il existe une multitude de façons suivant lesquelles les assurés peuvent former leurs croyances relatives aux taux servis futurs et chaque assuré peut avoir ses propres croyances. Ces anticipations ne peuvent être directement observées sur aucune base de données et même si les assurés acceptaient de répondre à un questionnaire sur le sujet, les réponses ne seraient pas fiables. Il est possible de modéliser des modes d'anticipation plus sophistiqués que le nôtre, mais tout modèle souffrirait inévitablement du fait que le phénomène sous-jacent -la formation d'anticipations – ne soit pas observable.

Le taux servi doit respecter les exigences réglementaires et contractuelles, optimiser la satisfaction des assurés et atteindre une marge minimale ciblée par l'assureur. Pour déterminer le taux servi aux assurés, nous avons supposé que l'assureur alloue le même budget de la PB que l'année précédente. Notre étude a été effectuée sur un horizon d'un an. Ceci, est une simplification car dans un contexte de rendements dégradés, on peut s'attendre à une diminution des taux au fur et à mesure du passage du temps. En effet, la stratégie de participation aux bénéfiques se base sur des décisions annuelles et dépend de la gestion de la richesse latente (reprise à la PPB et dégagement de plus ou moins-values latentes).

Les résultats obtenus dans le cadre de ce mémoire sont très encourageants. Cependant, ils demeurent théoriques et doivent être confrontés à la réalité. En effet, quand bien même l'assuré aurait tout intérêt à transférer une partie de son épargne vers un support en unités de compte, la confrontation de la théorie à la réalité pourrait montrer qu'une part des assurés n'arbitrera pas. Une partie de l'écart entre le modèle et la réalité peut s'expliquer par des écarts d'appétence au risque entre les différents assurés. Pour juger de l'efficacité de la solution proposée, elle doit faire l'objet d'un suivi pluriannuel, en prenant en compte les stratégies de l'assureur (stratégie commerciale, stratégie d'investissement et stratégie de participation aux bénéfiques). Ceci implique de se poser plusieurs questions concernant le programme futur de l'assureur. Est-ce que l'assureur souhaite mettre en place un système de bonus en une seule année ? Est-ce qu'il souhaite le reconduire à l'identique ou différemment ? Est-ce que l'assureur communique aux assurés sur son dispositif de distribution de PB à long terme ?

Ainsi, l'atteinte d'une cible de satisfaction client et d'une marge minimale pour l'assureur sont deux cibles qui s'apprécient sur plusieurs années.

### 3.3.2 Théorie de la décision intertemporelle

Dans le cas de disponibilité de données de suivi pluriannuel nous pouvons utiliser la théorie de la décision intertemporelle. De manière générale, la théorie de la décision intertemporelle consiste à étudier l'importance que peuvent accorder les individus à un futur proche par rapport à un futur lointain. Lors de cette étude effectuée à un horizon un an, nous avons supposé que l'assuré consomme toute sa richesse, c'est-à-dire que l'épargne de l'assuré ne fait pas l'objet d'entrée ou de sortie de flux. En réalité, l'assuré peut arbitrer le temps de bénéficier du bonus et revenir à sa composition initiale du portefeuille qui n'est pas favorable à l'assureur. Le modèle utilisé ne permet pas de prendre en compte ce phénomène.

Cette théorie ajoute deux notions centrales : la satisfaction à l'issue du gain et la déception ou la peur en cas de perte comme éléments clés du choix. Ces grandeurs sont différentes d'une personne à une autre, elles influent sur la décision finale. Dans un modèle intertemporel, ceci correspond au mécanisme de substitution intertemporelle standard utilisé par le ménage pour arbitrer entre consommation et épargne dans ce type de modèle. Dans un modèle simple de décision intertemporelle, les préférences intertemporelles sont représentées par un paramètre unique appelé taux d'escompte psychologique. Dans le cas d'une fonction d'utilité isoélastique CRRA, l'élasticité de substitution  $\epsilon$  correspond à l'inverse de l'aversion au risque, elle est donc constante.

On note le paramètre d'escompte psychologique  $\epsilon$ , si le temps est considéré comme discret, l'utilité intertemporelle considérée en  $t$ ,  $(U^t)$  s'écrit comme la somme d'utilités instantanées  $(u_t)$  pondérées par le facteur d'escompte psychologique :

$$U^t(u_t, \dots, u_T) = \sum_{k=0}^{T-t} \left(\frac{1}{1+\epsilon}\right)^k u_{t+k}$$

### 3.3.3 Alternative au cadre normatif : les modèles comportementaux

#### 3.3.3.1 L'économie comportementale

Nous avons choisi d'appliquer la théorie de la décision normative dans ce mémoire. Cependant, ce n'est pas la seule théorie qui pourrait être appliquée à notre problématique. L'économie comportementale (*Behaviorial Economics*) constitue une alternative intéressante à appliquer à notre problématique.

Située à l'intersection de la psychologie, des neurosciences, de la sociologie et de l'économie, l'économie comportementale se concentre sur l'application d'une compréhension honnête du comportement humain à des problèmes pratiques. Elle s'est développée pour pallier les limites de l'hypothèse de la rationalité individuelle. Les deux chercheurs Daniel Kahneman et Amos Tversky ont mis en évidence de manière expérimentale les violations de la théorie du choix rationnel. L'économie comportementale s'est fondée sur leurs théories, qui intègrent la dimension psychologique à la théorie de décision. En effet, les recherches effectuées par ces deux scientifiques indiquent que les gens ont deux systèmes de pensée : la pensée rapide, basée sur l'intuition et le traitement automatique ; et la pensée lente, qui est délibérée et nécessite plus de travail. De plus, leurs travaux montrent également que l'aversion au risque est asymétrique car l'individu est davantage aversé au risque en situation de gain qu'en situation de perte.

#### 3.3.3.2 L'économie comportementale en Assurance

Aux États-Unis, le secteur des assurances a commencé à utiliser cette théorie pour mieux comprendre le comportement des souscripteurs. Des entreprises innovantes du secteur ont mené des tests comportementaux au fil du temps, qui ont permis de tirer des conclusions fiables pour comprendre pourquoi une personne ne renouvelait pas sa politique ou pour augmenter la fidélité de sa clientèle.

Le *Behavioral Science Report* est un rapport conçu par la *Society of Actuaries* (SOA) en Juin 2019, pour fournir une connaissance générale au lecteur intéressé par le sujet de l'économie comportementale et motiver des recherches supplémentaires sur le sujet. En plus d'une revue de littérature sur l'utilisation de l'économie comportementale, les auteurs ont mis au point un questionnaire pour obtenir des informations d'un groupe de participants du secteur d'assurance utilisant les techniques de la *Behaviorial Economics*.

Selon le rapport [16], malgré le fait que l'économie comportementale soit un concept relativement nouveau sur le marché de l'assurance vie, elle présente un champ de recherche intéressant pour ce secteur. Certains chercheurs estiment que le moment est venu pour les assureurs-vie de faire appel à la *Behaviorial Economics* pour aider à résoudre les problématiques assurantielles tels que la sous-assurance.

Ce rapport porte principalement sur la souscription d'assurances vie. De nombreuses techniques de la (*Behaviorial Economics*) par exemple l'ancrage et la normalisation sociale sont résumées dans ce rapport. Elles pourraient être appliquées pour guider la conception, la modélisation et la souscription de produits. Les applications d'assurance actuelles encouragent la pensée rapide, ce qui amène les personnes à fournir des informations moins précises dans les demandes d'assurance. La *Behaviorial Economics* est au coeur de la souscription accélérée et des programmes basés sur les incitations.

Le rapport indique également que les domaines dans lesquels le potentiel d'exploitation est le plus important concernent la souscription, l'amélioration des ventes et l'influence du comportement des souscripteurs.

### **3.3.3.3 Application des techniques de l'économie comportementale**

Cette théorie s'appuie principalement sur l'expérimentation ou la collecte de données réelles. L'économie comportementale est une méthode d'analyse économique qui applique des connaissances psychologiques au comportement humain pour expliquer et éventuellement influencer la prise de décision économique.

L'application de ses techniques nécessite donc des bases de données avec un suivi pluri-annuel des comportements des assurés. L'économie comportementale se base sur une analyse des comportements réels des assurés et non pas sur des hypothèses qui supposent comment devraient se comporter les assurés.

Pour tirer profit des avantages de l'économie comportementale, les assureurs doivent investir des efforts considérables pour étudier l'impact et les meilleurs façons d'utiliser les techniques de l'économie comportementale selon leurs objectifs. L'objectif final est de pouvoir expliquer le comportement humain et éventuellement influencer la prise de décision économique.

### **3.3.3.4 Le cadre probabiliste**

Il est important de préciser qu'il est possible de contourner le cadre probabiliste dans la théorie de la décision. Il peut être remplacé par d'autres alternatives telles que la logique floue, la théorie des possibilités etc. Dans leur mémoire intitulé « *Modèle ALM : Apport de la Logique Floue dans la modélisation des comportements* », Detroulleau & Mouret (2013) expliquent comment ils ont modélisé par la logique floue le comportement des assurés en matière de rachats conjoncturels et celui des assureurs en ce qui concerne le taux de revalorisation ciblé par le management. Dans ce mémoire, nous avons présenté des alternatives au modèle retenu mais dans le cadre de la théorie de la décision.



# Conclusion

Ce mémoire est une contribution aux efforts entrepris par les assureurs pour s'adapter au contexte de taux bas. Il propose une nouvelle méthode permettant la pleine exploitation du potentiel incitatif des outils classiques à la disposition des assureurs. Nous faisons appel à des préceptes de la théorie économique pour mieux comprendre les comportements de notre population d'assurés. Ceci nous a permis de proposer une politique de participation aux bénéfices adaptée à leurs caractéristiques – notamment à leur niveau d'aversion au risque - et aidant l'assureur à réduire son exposition aux risques liés aux taux bas.

Pour mieux appréhender la réponse des assurés à des incitations financières, nous avons eu recours aux outils de la théorie de la décision. Cette branche de la théorie économique étudie l'individu et ses divers modes de prise de décision. Elle se donne pour méthodologie générale d'isoler un comportement humain dans un contexte précis, d'extraire les caractéristiques abstraites qui en constituent l'essence, puis de formaliser ces caractéristiques abstraites sous forme d'axiomes mathématiques. L'étape suivante consiste alors à traduire ces axiomes abstraits en des formulations mathématiques directement utilisables dans un contexte de modélisation. Ceci implique la coexistence d'une panoplie de modèles de théorie de la décision, chacun partant d'un ensemble d'observations comportementales, menant à un ensemble d'axiomes et de prédictions comportementales.

Au vu de notre problématique, nous sélectionnons un modèle de choix aléatoire (d'abord binaire, ensuite généralisé en un modèle de choix multiples). Par opposition aux modèles de choix déterministe, un agent n'est pas supposé toujours prendre la même décision même lorsqu'on le place dans un contexte identique. Alternativement, notre modèle suppose que, face aux mêmes incitations, un même assuré peut effectuer des choix d'investissement différents suivant une loi de probabilité que nous calibrons.

Nous calibrons notre modèle en nous servant d'une base de données sur les choix d'investissement entre fonds en euros et fonds en UC d'une large population de souscripteurs à un panier de produits d'épargne existants sur le marché. Nous nous intéressons principalement aux choix d'investissement effectués entre fonds en euros et fonds en UC. Notre objectif étant d'inciter les assurés à investir davantage en des fonds en unités de compte, nous proposons une politique de participation aux bénéfices qui offre des points de bonus en complément du taux servi dès qu'un assuré excède certains seuils d'investissement en UC (i.e. dès que la part

en UC investie par l'assuré dépasse certains niveaux), et à chaque fois que la variation (relativement à l'exercice précédent) de la part investie en UC dépasse certains autres seuils. Munis de notre modèle de décision, nous déterminons ces seuils et les valeurs des points de bonus correspondants de façon à maximiser la probabilité que la part en UC globale du portefeuille soit supérieure ou égale 30%.

Notre méthodologie préconise donc d'implémenter des seuils de bonification en fonction de l'évolution de la part en UC, et permet à l'assureur de maximiser la proportion des assurés détenant au moins 30% de part en UC avec une probabilité de 86.7% au lieu de 48.35 % dans le cas de non application d'une politique d'incitation. L'incitation financière permettrait à l'assureur de faire un gain de 38.35% en probabilité. Bien que ces chiffres soient encourageants, ils demeurent théoriques et nécessitent une validation empirique. La confrontation de nos résultats à une expérience réelle nous permettra de raffiner le modèle. Cependant, ceci nécessite par exemple d'avoir des données sur l'effet de la campagne de souscription et la variabilité réelle de l'épargne entre deux clôtures. Pour pouvoir juger de l'efficacité de la solution sur le plan pratique, un suivi pluriannuel prenant en compte les stratégies de l'assuré à long terme est nécessaire.

Ce mémoire a tenté de construire un pont entre deux disciplines qui, à notre sens, gagneraient à communiquer davantage : l'actuariat et la théorie économique. Dans cette étude, la théorie économique a servi à la modélisation et à la prédiction des comportements des agents. La littérature en théorie de la décision ne cesse de s'enrichir avec des modèles de plus en plus réalistes et complexes. Exploiter ces nouvelles technologies peut délivrer des prédictions encore plus pointues, raffiner nos résultats et même répondre à d'autres questions assurantielles dépassant le cadre de ce mémoire.

Par ailleurs, un grand nombre de questions connexes à notre problématique pourraient trouver des éléments de réponse dans la théorie économique. Dans ce mémoire, nous avons fait le choix de la structure globale de la politique de participation aux bénéfices. C'est-à-dire, nous avons, avant même de regarder nos données ou les prédictions de notre modèle, décidé du nombre de seuils de la part d'UC, et des seuils de variations des parts d'UC. Le mécanisme incitatif auquel notre étude a abouti est donc optimal parmi cette classe, riche certes mais néanmoins restreinte, de mécanismes que nous avons prédéfini. Ne pouvons-nous pas imaginer des mécanismes plus riches ? Quel est le nombre optimal de seuils à proposer ? Pourrions-nous envisager des mécanismes où les bonus seraient fonction continue des parts en UC ? Si oui, comment déterminer cette fonction de manière optimale ? Dès lors que nous aurons répondu à ces questions d'ordre technique, il restera à savoir comment l'assuré réagira à cette augmentation de complexité. Voilà une autre question où la théorie économique peut contribuer considérablement.

# Bibliographie

- [1] Abdellaoui Mohammed, (2009). The Handbook of Rational and Social Choice. Chapter 6 : Rank-Dependent Utility, 69-89. Oxford University Press.
- [2] Birnbaum M. H., Patton J. N., & Lott M. K. (1999). « Evidence against rank-dependent utility theories : Violations of cumulative independence, interval independence, stochastic dominance, and transitivity » . *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 77, 44-83.
- [3] Birnbaum M.H., Navarrete Juan B. (1998). « Testing Descriptive Utility Theories : Violations of Stochastic Dominance and Cumulative Independence ». *Journal of Risk and Uncertainty* 17, 49-78.
- [4] Blavatskyy Pavlo R. (2007). « Stochastic Utility Theorem ». Institute for Empirical Research in Economics University of Zurich Working Paper Series. Working Paper No. 311.
- [5] Blavatskyy Pavlo R. (2009). « How to Extend a Model of Probabilistic Choice from Binary Choices to Choices among More Than Two Alternatives ». Institute for Empirical Research in Economics University of Zurich Working Paper Series.
- [6] Blavatskyy Pavlo R. (2011). « A Model of Probabilistic Choice Satisfying First-Order Stochastic Dominance » . *Management Science*, vol. 57, no. 3, 542–548.
- [7] Buschena D. et D. Zilberman (2000). « Generalized expected utility, heteroscedastic error, and path dependence in risky choice » . *J. Risk Uncertainty* 20, 67–88.
- [8] Charles A. Holt et Susan K. Laury (2002). « Risk Aversion and Incentive Effects ». *The American Economic Review*, vol. 92, No. 5, 1644-1655.
- [9] Debreu G. (1983). Representation of a preference ordering by a numerical function. In G. Debreu & W. Hildenbrand (Authors), *Mathematical Economics : Twenty Papers of Gerard Debreu (Econometric Society Monographs)*, 105-110. Cambridge : Cambridge University
- [10] Diecidue Enrico et Wakker Peter P. (2001). « On the Intuition of Rank-Dependent Utility ». *Journal of Risk and Uncertainty*, vol. 23, Issue 3, 281–298.
- [11] Itzhak Gilboa, Andrew Postlewaite, Larry Samuelson et David Schmeidler. (2019) « What are axiomatizations good for ? ». *Theory and Decision*, vol. 86, Issue 3–4, 339–359.
- [12] John K. Dagsvik. « Axiomatization of stochastic models for choice under uncertainty ». *Mathematical Social Sciences*, vol. 55., Issue 3, May 2008, 341-370.

- [13] Hey John et Orme Chris (1994). « Investigating Generalizations of Expected Utility Theory Using Experimental Data ». *Econometrica*, vol.62, Issue 6, 1291–1326.
- [14] Luce R. D. et Suppes, P. (1965). « Preference, utility, and subjective probability ». in R. D. Luce, R. R. Bush et E. Galanter (eds.), *Handbook of Mathematical Psychology*, vol. 3., New York : Wiley, 249-410.
- [15] Néstor Gandelmanand et Rubén Hernández-Murillo (2014). « Risk Aversion at the Country Level ». FEDERAL RESERVE BANK OF ST. LOUIS Research Division.
- [16] Society of Actuaries (2019). *Behavioral Science Report : How techniques and models are used to optimize various insurance decisions and processes.*

# Annexe : Axiomatique de Savage et limites

## Axiomatique de Savage

En s'appuyant sur les idées de de Finetti (1937)<sup>6</sup>, VNM et les synthétisant, Savage (1954) a proposé la première théorie axiomatique complète de l'utilité espérée subjective.

L'axiomatique de Savage est nettement plus complexe, car contrairement au premier cas de VNM, les probabilités ne sont pas simplement données mais elles sont produites par la construction elle-même (à partir des préférences individuelles). Il ne s'agit plus d'un univers risqué mais d'un univers incertain car Savage ne suppose pas l'existence des probabilités.

Il est courant de modéliser la prise de décision dans un univers incertain en construisant un ensemble de choix utilisant deux ensembles de départ (*primitive sets*) : un ensemble  $\mathcal{S}$  d'états de la nature (ou d'états pour abrégé) et un ensemble  $\mathcal{C}$  dont les éléments sont les conséquences.

L'ensemble de choix,  $\mathcal{F}$ , est l'ensemble des correspondances entre l'ensemble des états et l'ensemble des conséquences. Les éléments de  $\mathcal{F}$  sont appelés actes et s'interprètent comme des plans d'action.

Les sous-ensembles de l'ensemble des états  $\mathcal{S}$  sont des événements. Une combinaison d'un acte,  $f$ , choisi par le décideur, et d'un état,  $s$ , sélectionné détermine une conséquence unique,  $c(f, s) \in \mathcal{C}$ . Les décideurs se caractérisent par des relations de préférence, sur  $\mathcal{F}$ , selon l'interprétation habituelle, à savoir,  $f \succ g$  signifie que l'acte  $f$  est au moins aussi souhaitable que l'acte  $g$ .

Dans ce modèle, l'utilité des conséquences est indépendante des événements sous-jacents et les probabilités d'événements sont indépendantes des conséquences attribuées à ces événements par les actes.

L'énoncé des postulats<sup>7</sup> de Savage utilise la notation et les définitions suivantes. Soit un événement  $E$  et des actes  $f$  et  $h$ ,  $f_E h$  désigne l'acte défini par  $(f_E h)(s) = f(s)$  si  $s \in E$  et  $(f_E h)(s) = h(s)$  sinon. Un événement  $E$  est nul si  $f_E h \sim f'_E h$  pour tout acte  $f$  et  $f'$ , sinon c'est événement nul. Un acte constant est acte qui attribue la même conséquence à tous les événements. Les actes constants sont notés par leurs valeurs, si  $f(s) = x \forall s$ , l'acte constant  $f$  est noté par  $x$ . Les postulats de la théorie de l'utilité subjective s'énoncent comme suit :

— **P-1 Ordre faible**

$\succeq$  est un ordre faible (relation binaire strictement antisymétrique et négativement transitive).

---

6. L'un des premiers à avoir formalisé le concept de probabilité subjective basée sur le choix. Il explore les conditions dans lesquelles le degré de conviction d'un décideur en la vérité d'une proposition ou d'un événement peut être déduit de son comportement de pari et quantifié par une probabilité.

7. Un postulat est un principe non démontré qui est utilisé dans la construction d'une théorie mathématique. La différence avec un axiome, est que le postulat peut être démontré plus tard.

— **P-2 Le principe de la chose sûre (ou d'indépendance)**

Pour tous les actes  $f, f', h$ , et  $h'$  et chaque évènement  $E$ ,  $f_E h \succeq f'_E h$  si et seulement si  $f_E h' \succeq f'_E h'$ . Ce principe permet de définir les préférences en fonction d'évènements comme suit : Pour chaque évènement  $E$ , et tout  $f, f' \in \mathcal{F}$ ,  $f \succeq_E f'$  si  $f \succeq f'$  et  $f(s) = f'(s)$  pour chaque  $s$  qui n'appartient pas à  $E$ , ( $s \notin E$ ).

Le second postulat exige que la préférence entre les actes dépend uniquement des conséquences d'évènements dans lesquels les valeurs des deux actes comparés sont distinctes. Il introduit une séparabilité<sup>8</sup> rappelant celle rencontrée dans l'axiome d'indépendance.

— **P-3 Préférences conditionnelles clairement définies**

Pour chaque évènement non nul  $E$  des actes constants  $x$  et  $y$ ,  $x \succeq y$  si et seulement si  $x_E f \succeq y_E f$  pour chaque acte  $f$ .

Ce troisième postulat traduit que conditionnellement à des évènements non nuls, le classement ordinal des conséquences est indépendant des évènements de conditionnement.

— **P-4 Indépendance des préférences et des croyances**

Pour tout évènement  $E$  et  $E'$  des actes constants  $x, y, x'$ , et  $y'$  tels que  $x \succ y$  et  $x' \succ y'$ ,  $x_E y \succeq x'_E y$  si et seulement si  $x'_E y' \succeq x'_E y'$ .

Les postulats **P-1 à P-4** implique l'existence d'une relation transitive et complète sur l'ensemble des évènements, représentant ainsi les convictions du décideur comme une probabilité qualitative.<sup>9</sup> De plus, ces postulats impliquent également que les attitudes de risque du décideur sont indépendantes de tout évènement.

— **P-5 Non-dégénérescence (non-trivialité des conséquences)**

Il existe au moins un couple d'actes constants  $x$  et  $x'$ ,  $x \succ x'$ .

Ce postulat traduit la nécessité de l'existence d'actes constants entre lesquels le décideur n'est pas indifférent.

— **P-6 Continuité des préférences**

Pour chaque acte  $f, g$  et  $h$ , qui satisfont  $f \succ g$ , il existe une partition finie  $(E_i)_{i=1}^n$  de l'espace des états, tels que pour chaque  $i$ ,  $f \succ h_{E_i} g$  et  $h_{E_i} f \succ g$ . Une mesure de probabilité est dite non-atomique si chaque évènement non nul peut être partitionné en deux sous-évènements non nuls.

---

8. C'est le fait de considérer plusieurs attributs indépendamment les uns des autres sans changer pour autant la nature de ce qui est étudié.

9. Une relation binaire  $\succeq$  sur une algèbre d'évènements  $\mathcal{A}$ , dans  $\mathcal{S}$  est une probabilité qualitative si (a) elle est transitive et complète; (b)  $E \succeq \emptyset$ , pour chaque  $E \in \mathcal{A}$ ; (c)  $S \succ \emptyset$ ; et (d) pour chaque  $E, E', E'' \in \mathcal{A}$ , si  $E \cap E' = E' \cap E'' = \emptyset$  alors  $E \succeq E'$  si et seulement si  $E \cup E'' \succeq E' \cap E''$ .

De manière formelle,  $\pi$  est une mesure de probabilité non atomique sur l'ensemble des états pour chaque événement  $E$  si pour chaque événement  $E$  et un nombre  $0 < \alpha < 1$ , il existe un événement  $E' \subset E$  tel que  $\pi(E') = \alpha\pi(E)$ .

Le postulat **P-6** implique qu'il existe une infinité d'états dans le monde et que s'il existe une mesure de probabilité représentant les convictions du décideur, elle doit être non atomique. De plus, la mesure de probabilité est définie sur l'ensemble des événements, elle est donc une mesure additive finie c'est-à-dire que pour tout événement  $E$ ,  $0 \leq \pi(E) \leq 1$ ,  $\pi(S) = 1$  et pour deux événements disjoints  $E$  et  $E'$ ,  $\pi(E \cup E') = \pi(E) + \pi(E')$ .

Le sixième postulat introduit une forme de continuité de la relation de préférence. Il affirme qu'aucune conséquence n'est infiniment meilleure ou infiniment pire qu'une autre conséquence.

#### — **P-7 Dominance**

Pour chaque événement  $E$  et des états  $f$  et  $f'$ , si  $f \succ_E f'(s)$  pour chaque  $s$  de  $E$ , alors  $f \succeq_E f'$  et si  $f'(s) \succ_E f$  pour chaque  $s$  dans  $E$  alors  $f' \succeq_E f$ .

Le septième postulat est une exigence de monotonie affirmant que si le décideur considère un acte strictement meilleur (pire) que chacun des gains d'un autre acte, pris comme des actes constants, sur un événement non nul donné, cet acte est alors strictement préféré à la condition (moins préféré) que ce dernier.

Le théorème de Savage établit que les postulats **P-1** à **P-7** sont des conditions nécessaires et suffisantes pour la représentation de la relation de préférence, par l'espérance d'une fonction d'utilité sur l'ensemble des conséquences, sous une mesure de probabilité sur l'ensemble des événements. La fonction d'utilité est unique à une transformation affine et positive près, et la mesure de probabilité est unique, non atomique et finalement additive.

Formellement, le théorème de représentation de la théorie de l'utilité espérée subjective s'énonce comme suit :

#### **Théorème de représentation de la théorie d'utilité espérée subjective :**

Soit  $\succeq$  une relation de préférence sur  $\mathcal{F}$  : Alors  $\succeq$  satisfait les postulats **P-1** à **P-7** si et seulement s'il existe une mesure de probabilité unique, non atomique et qui satisfait l'additivité finie  $\pi$  sur  $\mathcal{S}$  et une fonction à valeurs réelles, bornée  $u$  définie sur  $\mathcal{C}$  tel que  $\succeq$  est représentée par :

$$f \rightarrow \int_S u(f(s))d\pi(s).$$

De plus,  $u$  est unique à une transformation affine et positive près, et  $\pi(E) = 0$  si et seulement si  $E$  est nul.

## Le paradoxe d'Ellsberg

Le tableau 3.31 décrit les deux situations de choix proposées dans l'exemple Ellsberg, le décideur doit choisir une alternative (acte) dans chaque situation de choix. L'incertitude est générée par le tirage au sort d'une balle dans une urne contenant trente ( $R$ ) balles rouges ainsi que soixante balles qui sont soit noires ( $N$ ) ou jaunes ( $J$ ).

Le principe de chose sûre de Savage (**P-2**) exige qu'une préférence stricte pour  $f(g)$  soit accompagnée d'une préférence stricte pour  $f'(g')$ . Néanmoins, Ellsberg a affirmé que beaucoup de gens raisonnables vont choisir  $f'g'$ . Il a suggéré que préférer  $f$  à  $g$  est motivé par l'aversion à l'ambiguïté : le décideur a plus de connaissance précise sur la probabilité de «l'événement gagnant» en acte  $f$  en acte  $g$ .

De manière analogue, dans la seconde situation de choix, le choix de l'acte  $g'$  peut être expliqué par l'absence d'information précise concernant la probabilité de l'événement  $Y$ . En terme de la relation de préférence  $\succ$ , il démontre que sous l'utilité espérée, le choix  $f'g'$  implique deux résultats contradictoires :  $R \succ N$  et  $N \cup J \succ R \cup J$ .

	30 balles		60 balles	
	Rouge	Noir	Jaune	
$f$	1000 €	0	0	
$g$	0	1000 €	0	
$f'$	1000 €	0	1000 €	
$g'$	0	1000 €	1000 €	

**TABLE 3.31** – Paradoxe d'Ellsberg

La validité empirique de la théorie de l'utilité espérée (EUT) a ses limites, les deux paradoxes en sont des exemples de comportement incompatible avec EUT non seulement dans un univers risqué mais également dans un univers incertain.



# Table des figures

1	Distribution globale du portefeuille avec et sans incitation financière (fonction de masse) . . . . .	vii
2	The global distribution of the unit linked share in the portfolio with and without financial incentives (probability mass function) . . . . .	xii
1.1	Rendement des supports euros. <i>Source : Fédération Française de l'Assurance.</i> . . . . .	6
1.2	Exemple d'un rendement bonifié : « Bonus Euro + ». <i>Source : Produits assurance-vie d'AXA.</i> . . . . .	10
1.3	Répartition des placements financiers des ménages. <i>Source : Banque de France.</i> . . . . .	12
1.4	Cotisations par type de support. <i>Source : Fédération Française de l'Assurance.</i> . . . . .	13
2.1	L'utilité isoélastique pour différentes valeurs de $A_R$ <i>Source : Alternatives Economiques.</i> . . . . .	23
2.2	Algorithme de choix du décideur . . . . .	43
2.3	Exemple d'ensemble $\{G \in \Gamma(S)   R(G) = A\}$ où $S := \{A, B, C\}$ . . . . .	46
2.4	Ventilation de la PM totale en euros par produit . . . . .	52
2.5	Ventilation de la PM totale par part en UC . . . . .	53
2.6	Distribution des parts en UC en fonction des PM totales . . . . .	56
2.7	Évolution de $Q$ en fonction du nombre d'itérations . . . . .	61
2.8	Évolution de la valeur optimale de $\rho$ en fonction de $\lambda$ . . . . .	63
2.9	Évolution de la valeur optimale de $\lambda$ en fonction de $\rho$ . . . . .	65
2.10	Exemple de surface de calibrage du fonds A . . . . .	67
3.1	Sensibilité par rapport à des variations du bonus $B_1$ (fonction de masse) . . . . .	73
3.2	Sensibilité par rapport à des variations du bonus $B_1$ (Fonction de survie) . . . . .	74
3.3	Sensibilité par rapport à des variations du bonus $B_S$ (fonction de masse) . . . . .	75
3.4	Sensibilité par rapport à des variations du seuil de variation UC (fonction de masse) . . . . .	76
3.5	Sensibilité par rapport à des variations du seuil absolu (fonction de masse) . . . . .	77
3.6	Distribution globale du portefeuille avec et sans incitation financière (fonction de masse) . . . . .	82
3.7	Distribution globale du portefeuille avec et sans incitation financière (fonction de masse) . . . . .	90

3.8	Comparaison entre le cas probabiliste et le cas déterministe (fonction de masse)	92
3.9	Comparaison entre le cas probabiliste et le cas déterministe (fonction de survie)	93
3.10	Sensibilité par rapport à des variations des frais d'arbitrage (fonction de masse)	97
3.11	Sensibilité par rapport à des variations du seuil absolu (fonction de masse)	98
3.12	Sensibilité par rapport à des variations du seuil absolu (Fonction de répartition)	99
3.13	Distribution globale du portefeuille (fonction de masse)	101
3.14	Distribution globale du portefeuille (fonction de survie)	101
3.15	Sensibilité de la distribution globale à la contrainte sur l'encours (fonction de masse)	104
3.16	Sensibilité de la distribution globale à la contrainte sur l'encours (fonction de survie)	104
3.17	Distribution globale du portefeuille (fonction de masse)	107
3.18	Distribution globale du portefeuille (fonction de survie)	107

# Liste des tableaux

1	Forme de la solution de bonification proposée . . . . .	vi
2	Taux servi par produit d'épargne . . . . .	viii
3	The bonuses in the proposed solution. . . . .	xi
4	The interest rate per product. . . . .	xii
2.1	Paradoxe d'Allais . . . . .	26
2.2	Caractéristiques des contrats . . . . .	49
2.3	Caractéristiques des contrats par produit . . . . .	50
2.4	Le couple (rendement, volatilité) pour les supports de fonds en UC . . . . .	54
2.5	Tests de corrélation . . . . .	57
2.6	Paramètres fixés de la fonction objectif . . . . .	60
2.7	Résultats de l'optimisation unidimensionnelle (L-BFGS-B) de $\rho$ pour le fonds A . . . . .	62
2.8	Résultats de l'optimisation unidimensionnelle de $\lambda$ avec la méthode LBB . . . . .	64
2.9	Résultats de l'optimisation unidimensionnelle (L-BFGS-B) de $\lambda$ pour le fonds A . . . . .	64
2.10	Résultats de l'optimisation unidimensionnelle de $\rho$ avec la méthode LBB . . . . .	66
2.11	Résultats de l'optimisation bidimensionnelle sans contrainte avec la méthode LBB . . . . .	67
2.12	Résultats de l'optimisation bidimensionnelle avec contrainte sur $\lambda$ avec la méthode LBB . . . . .	68
3.1	Paramètres fixés communs au calcul des sensibilités . . . . .	72
3.2	Paramètres de sensibilités par rapport au Bonus $B_1$ . . . . .	72
3.3	Évolution de la meilleure alternative en fonction du bonus $B_1$ . . . . .	73
3.4	Paramètres de sensibilités par rapport au Bonus $B_S$ . . . . .	74
3.5	Paramètres de sensibilités par rapport au seuil absolu $Seuil_{Absolu}$ . . . . .	76
3.6	Évolution de la meilleure alternative en fonction du $Seuil_{Variation}$ . . . . .	76
3.7	Paramètres de sensibilités par rapport au seuil absolu $Seuil_{Variation}$ . . . . .	77
3.8	Évolution de la meilleure alternative en fonction du $Seuil_{Absolu}$ . . . . .	78
3.9	Paramètres d'initialisation de l'optimisation des bonus et seuils . . . . .	79
3.10	(*) Initialisation du $Seuil_{Variation}$ . . . . .	80
3.11	Résultats de l'optimisation des bonus avec seuils fixés . . . . .	80

3.12 Résultats de l'optimisation des bonus et seuils avec contrainte sur la somme des bonus . . . . .	81
3.13 Paramètres d'initialisation de l'optimisation des bonus et seuils par strates . . .	86
3.14 Résultats de l'optimisation des bonus et seuils par strates . . . . .	87
3.15 Résultats de l'optimisation des bonus et seuils par strates avec plusieurs contraintes	88
3.16 Forme de la solution de bonification proposée . . . . .	89
3.17 Résultats de l'optimisation à deux seuils (en désactivant deux seuils de variations)	91
3.18 Ventilation des PM en euros éligibles aux bonus rapportées à la PM totale en euros attendue par produit . . . . .	94
3.19 Taux final servi par produit . . . . .	95
3.20 Écart entre les cas avec et sans incitation en M € . . . . .	95
3.21 Paramètres fixés pour le calcul des sensibilités par rapport aux frais . . . . .	96
3.22 Paramètres fixés pour le calcul des sensibilités par rapport aux frais . . . . .	98
3.23 Résultats de l'optimisation des bonus et seuils par strates avec frais d'arbitrage	100
3.24 Taux servi par produit (bonus graduel + application de frais d'arbitrage) . . .	102
3.25 Écart entre les cas avec et sans incitation en M € . . . . .	102
3.26 Résultats de l'optimisation des bonus et seuils par strates avec frais d'arbitrage	103
3.27 Ventilation des PM en euros éligibles aux bonus rapportées à la PM totale en euros attendue par produit (bonus graduel et contrainte sur l'encours) . . . . .	105
3.28 Écart entre les cas avec et sans incitation en M € . . . . .	105
3.29 Résultats de l'optimisation des bonus et seuils par strates avec frais d'arbitrage et contrainte sur l'encours . . . . .	106
3.30 Taux servi par produit (bonus graduel + contrainte sur l'encours + application des frais d'arbitrage) . . . . .	108
3.31 Paradoxe d'Ellsberg . . . . .	vi

